C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, p. 1047-1052, 1998
Théorie des nombres/*Group Theory*

# Signes locaux des courbes elliptiques en 2 et 3

**Emmanuel HALBERSTADT**

Laboratoire de mathématiques fondamentales (UFR 921), Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France
Courriel : halberst@math.jussieu.fr

(Reçu le 2 février 1998, accepté après révision le 14 avril 1998)

**Résumé.** Soit $p$ un nombre premier. A toute courbe elliptique $E$ sur $\mathbf{Q}_p$ correspond un signe local $W_p(E)$, défini à partir des facteurs epsilon locaux de Deligne. Ce signe est déjà connu si $p > 3$ et aussi dans certains cas lorsque $p = 2$ ou 3. Dans cette Note, nous donnons la valeur de $W_2$ ou $W_3$ dans tous les cas. Pour $W_3$, nos résultats ne sont certains que si l'on admet qu'un certain nombre (fini) de courbes elliptiques (sur $\mathbf{Q}$) auxiliaires sont des courbes de Weil. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

***Local root numbers of elliptic curves for*** $p = 2$ ***or*** 3

**Abstract.** *Let p be a prime number. Associated to every elliptic curve E over* $\mathbf{Q}_p$ *there is a local root number* $W_p(E) = \pm 1$, *constructed from the local epsilon factors of Deligne. This sign is already known when* $p > 3$, *and also, in certain cases, when* $p = 2$ *or* 3. *In this Note, we give the value of* $W_2$ *or* $W_3$ *in all cases. Concerning* $W_3$, *for our results to be valid, we have to assume that a certain (finite) number of auxiliary elliptic curves over* $\mathbf{Q}$ *are Weil curves.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

## *Abridged English Version*

Let $E$ be an elliptic curve over $\mathbf{Q}$ and $L(s)$ its Hasse–Weil $L$-function, as in (1). If $E$ is a Weil curve, $f$ is a normalized Hecke eigenform for $\Gamma_0(N)$, $N$ being the conductor of $E$ (*see* [1], Thm. A and its Corollary). The function $L$ has an analytic continuation to an entire function satisfying the functional equation (2). In this equation $\varepsilon$, the root number of $E$, is a product of local root numbers $W_p(E) = \pm 1$, one for each completion of $\mathbf{Q}$, as in (3), and $W_p(E) = 1$ for all but finitely many $p$. These local root numbers are defined for each elliptic curve $E$ over a completion of $\mathbf{Q}$ ; they have been calculated in many cases (*see* [2] and [8]), we recall these results in cases 1) to 5) (French text). In Tables 1 and 2 below, we give the value of $W_p(E)$ in the remaining cases: $p = 2$ or 3 and $E$ is an elliptic curve over $\mathbf{Q}_p$ having potentially good reduction.

Let us recall the definition of $W_p(E)$, at least in the case of potentially good reduction over $\mathbf{Q}_p$. Let $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ be the Weil group, $\overline{\mathbf{Q}}_p$ being an algebraic closure of $\mathbf{Q}_p$: $\mathcal{W}$ is the subgroup of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ consisting of those elements which induce an integral power of the Frobenius

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

automorphism on the residue class field of $\overline{\mathbf{Q}}_p$. One endows $\mathcal{W}$ with a natural topology (*see* [8], §2). Let $\ell$ be a prime number distinct from 2 and $p$. The natural action of $\mathcal{W}$ on the Tate module $\mathrm{T}_\ell(E)$ induces, if one makes some obvious choices, a representation of $\mathcal{W}$ with values in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$, we denote its contragredient by $\sigma$. Then $\sigma$ is continuous (by Néron–Ogg–Shafarevitch) and semi-simple (*see* [8], Prop. 2). Let $\psi : \mathbf{Q}_p \to \mathbf{C}^*$ be any nontrivial continuous character of $\mathbf{Q}_p$ and $\mathrm{d}x$ any Haar measure on $\mathbf{Q}_p$. Then $W_p(E)$ is given by formula (4), $\varepsilon(\sigma, \psi, \mathrm{d}x) \in \mathbf{C}^*$ being the local epsilon factor as defined by Deligne (*see* [4], th. 4.1). One checks that $W_p(E)$ is independent of all the choices made.

We can only give an idea of the (indirect) calculations leading to Tables 1 and 2. Start with an elliptic curve $E$ over $\mathbf{Q}_2$ having potentially good reduction. One finds an elliptic curve $E'$ over $\mathbf{Q}$, satisfying three conditions. First, $E'$ is 2-adically close enough to $E$, so that $W_2(E') = W_2(E)$ (use Hensel's Lemma); secondly, $E'$ has good reduction in 3, so that $E'$ is a Weil curve (by unpublished results of B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor). Finally, the root number $\varepsilon'$ of $E'$ is $-1$; one checks this with formula (2.8.10) of [3]. Then formula (3) gives $W_2(E')$. The method is the same for $p = 3$, but here we cannot be sure that $E'$ is a Weil curve. The conclusion is the following. We have a finite list of elliptic curves over $\mathbf{Q}$; if all these curves are Weil curves, then Table 2 will give $W_3(E)$, for *each* elliptic curve $E$ over $\mathbf{Q}_3$.

From Tables 1 and 2 one can read $W_p = W_p(E)$, for every non-semi-stable elliptic curve $E$ over $\mathbf{Q}_p$ ($p = 2$ or 3), given by a *minimal* model. The results of [8] and [2] have been included (cases with a •). The usual normalized valuation of $\mathbf{Q}_p$ is denoted by $v$. For every $x \in \mathbf{Q}_p$ and every integer $k$, set $x_k = x/p^k$; if $x \neq 0$ and $k = v(x)$, $x_k$ is denoted by $x'$. The different cases are classified by the Kodaira symbol (column Kod.); if $(v(c_4), v(c_6), v(\Delta))$ alone does not give this symbol, a special condition (column condition spéciale) insures that the Kodaira symbol of $E$ is the one indicated (*see* [7]). In the column $W_p$, if $W_p$ is not constant in the mentioned case, a *necessary and sufficient condition for* $W_p$ *to be equal to* 1 is given.

---

Soient $E$ une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ et $L$ sa fonction de Hasse–Weil ; on écrit comme d'habitude

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad \text{et} \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n z}.$$

Supposons que $E$ soit une courbe de Weil, de conducteur $N$. Dans ce cas, $f$ est une « newform » de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$ (*voir* [1], th. A et son corollaire), vecteur propre des opérateurs de Hecke. La fonction $L$ se prolonge analytiquement à $\mathbf{C}$, et vérifie une équation fonctionnelle :

$$\Lambda(2-s) = \varepsilon\,\Lambda(s), \quad \text{avec} \quad \Lambda(s) = N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s) \quad \text{et} \quad \varepsilon = \pm 1\,.$$

On sait que $\varepsilon$ est un produit de signes locaux, presque tous égaux à 1 :

$$\varepsilon = W_\infty(E) \prod_{p \text{ premier}} W_p(E). \tag{1}$$

Ces signes locaux, définis en fait pour toute courbe elliptique sur le complété de $\mathbf{Q}$ correspondant (voir plus loin), sont connus dans certains cas (*voir* [2] et [8]) :

1) Pour toute courbe elliptique $E$ sur $\mathbf{R}$, on a $W_\infty(E) = -1$ ; dans les cas suivants, $E$ sera donc une courbe elliptique sur l'un des $\mathbf{Q}_p$. On notera $v$ la valuation normalisée de $\mathbf{Q}_p$ et $c_4, c_6, \Delta, j$ les invariants standard (d'un modèle de Weierstrass entier minimal) de $E$.

2) Cas semi-stable : si $E$ a bonne réduction, $W_p(E) = 1$ ; si $E$ a mauvaise réduction de type multiplicatif, $W_p(E)$ vaut 1 dans le cas non déployé et $-1$ dans le cas déployé.
3) On suppose que $E$ a mauvaise réduction de type additif et que $j$ n'est pas entier. Si $p > 2$, on a $W_p(E) = \left(\frac{-1}{p}\right)$ ; si $p = 2$, on a $W_2(E) = -\left(\frac{-1}{b}\right)$, en posant $b = c_6\, 2^{-v(c_6)}$.
4) On suppose que $E$ a mauvaise réduction de type additif, que $j$ est entier et $p > 3$. Soit $e = 12/\mathrm{pgcd}(12, v(\Delta))$. Alors $W_p(E) = \left(\frac{-t}{p}\right)$, en posant $t = 1$ si $e = 2$ ou 6, $t = 2$ si $e = 4$ et $t = 3$ si $e = 3$.
5) Si $p = 2$ ou 3, $W_p(E)$ a été déterminé dans [8] (et explicité [2]) dans le cas « abélien » : $E$ a mauvaise réduction de type additif mais acquiert bonne réduction dans une extension abélienne (finie) de $\mathbf{Q}_p$.

Nous complétons ici ces résultats, en donnant la valeur de $W_p(E)$ dans les cas restants : $p = 2$ ou 3, $E$ a mauvaise réduction de type additif et $j$ est entier (tableaux 1 et 2). Pour une courbe de Weil $E$, ceci permet le calcul de $\varepsilon$, produit des divers signes locaux, à partir d'une équation de Weierstrass minimale de $E$.

Tableau 1. – Signe local $W_2$.

*Table 1. – Local root number $W_2$.*

| Kod. | $v(c_4)$ | $v(c_6)$ | $v(\Delta)$ | Condition spéciale | $v(N)$ | $W_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| II | 4 | 5 | 4 | $c_4' \equiv c_6' \pmod 4$ | 4 | $c_4' \equiv 1 \pmod 4$ |
| II | $\geq 5$ | 5 | 4 | $c_6' \equiv 3 \pmod 4$ | 4 | $v(c_4) = 5$ |
| II | 4 | $\geq 7$ | 6 | | 6 | $v(c_6) = 7$ |
| II | 4 | 6 | 7 | | 7 | $c_6' \equiv 5$ ou $5c_4' \pmod 8$ |
| II | 5 | 6 | 6 | | 6 | $c_4' \equiv 3 \pmod 4$ |
| •II | $\geq 6$ | 6 | 6 | | 6 | $c_6' \equiv 1 \pmod 4$ |
| III | 4 | 5 | 4 | $c_4' \equiv 1 \equiv -c_6' \pmod 4$ | 3 | $c_4'c_6' \equiv 3 \pmod 8$ |
| III | 5 | 5 | 4 | $c_6' \equiv 1 \pmod 4$ | 3 | $c_6' \equiv 5 \pmod 8$ |
| III | 4 | $\geq 7$ | 6 | $c_4' \equiv 3 \pmod 4$ | 5 | $c_4' - 4c_{6,7} \equiv 7, 11 \pmod{16}$ |
| III | 5 | 7 | 8 | | 7 | $c_6' \equiv 3$ ou $2c_4' + c_6' \equiv 7 \pmod 8$ |
| III | 5 | 8 | 9 | | 8 | $2c_6' + c_4' \equiv \pm 1 \pmod 8$ |
| III | 5 | $\geq 9$ | 9 | | 8 | $c_4' \equiv 1, 3 \pmod 8$ |
| IV | 4 | 5 | 4 | $c_6' \equiv 1 \equiv -c_4' \pmod 4$ | 2 | $-1$ |
| IV | $\geq 6$ | 5 | 4 | $c_6' \equiv 1 \pmod 4$ | 2 | $-1$ |
| IV* | 4 | 6 | 8 | $2c_6' + c_4' \equiv 11 \pmod{16}$ | 2 | $-1$ |
| IV* | $\geq 7$ | 7 | 8 | $c_6' \equiv 1 \pmod 4$ | 2 | $-1$ |
| III* | 4 | 6 | 10 | $c_6' \equiv 3 \pmod 4$ | 3 | $c_4' - 2c_6' \equiv 3, 19 \pmod{64}$ |
| III* | 7 | 9 | 12 | | 5 | $c_4' \equiv 1 \pmod 4$ et $c_6' \equiv \pm 1 \pmod 8$ ou $c_4' \equiv 3 \pmod 4$ et $c_6' \equiv 1, 3 \pmod 8$ |
| III* | 7 | 10 | 14 | | 7 | $c_4' \equiv 1 \pmod 4$ et $c_4'c_6' \equiv 5, 7 \pmod 8$ ou $c_4' \equiv 3 \pmod 4$ et $c_4'c_6' \equiv 1, 7 \pmod 8$ |

Tableau 1. – Signe local $W_2$ (suite).
*Table 1. – Local root number $W_2$ (continued).*

| Kod. | $v(c_4)$ | $v(c_6)$ | $v(\Delta)$ | Condition spéciale | $v(N)$ | $W_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| III* | 7 | 11 | 15 | | 8 | $2c_6' + c_4' \equiv 1, 3 \pmod 8$ |
| III* | 7 | $\geq 12$ | 15 | | 8 | $c_4' \equiv 5, 7 \pmod 8$ |
| II* | 4 | 6 | 11 | $c_6' \equiv 3 \pmod 4$ | 3 | $c_6' \equiv 1, 3 \pmod 8$ |
| •II* | $\geq 8$ | 9 | 12 | | 4 | $c_6' \equiv 1 \pmod 4$ |
| II* | $\geq 8$ | 10 | 14 | | 6 | $c_6' \equiv 1 \pmod 4$ |
| $\mathrm{I}_0^*$ | 4 | 6 | 8 | $2c_6' + c_4' \equiv 3, 15 \pmod{16}$ | 4 | $2c_6' + c_4' \equiv 3 \pmod{16}$ |
| $\mathrm{I}_0^*$ | 4 | 6 | 9 | | 5 | $c_6' \equiv 7 \pmod 8$ ou $2c_6' + c_4' \equiv 11 \pmod{32}$ |
| $\mathrm{I}_0^*$ | $\geq 6$ | 7 | 8 | $c_6' \equiv 3 \pmod 4$ | 4 | $v(c_4) = 6$ |
| $\mathrm{I}_0^*$ | 6 | 8 | 10 | | 6 | $c_4'c_6' \equiv 3 \pmod 4$ |
| $\mathrm{I}_0^*$ | $\geq 7$ | 8 | 10 | | 6 | $c_6' \equiv 1 \pmod 4$ |
| $\mathrm{I}_1^*$ | 4 | 6 | 8 | $2c_6' + c_4' \equiv 7 \pmod{16}$ | 3 | $2c_6' + c_4' \equiv 23 \pmod{32}$ |
| $\mathrm{I}_1^*$ | 6 | 7 | 8 | $c_6' \equiv 1 \pmod 4$ | 3 | $2c_4' + c_6' \equiv 3 \pmod 8$ |
| $\mathrm{I}_2^*$ | 4 | 6 | 10 | $c_6' \equiv 1 \pmod 4$ | 4 | 1 |
| $\mathrm{I}_2^*$ | 6 | $\geq 10$ | 12 | $c_4' \equiv 3 \pmod 4$ | 6 | $v(c_6) = 10$ |
| $\mathrm{I}_2^*$ | 6 | 9 | 13 | | 7 | $c_4' \equiv 11$ ou $c_4' + 4c_6' \equiv 3 \pmod{16}$ |
| $\mathrm{I}_3^*$ | 4 | 6 | 11 | $c_6' \equiv 1 \pmod 4$ | 4 | 1 |
| $\mathrm{I}_3^*$ | 6 | 10 | 12 | $c_4' \equiv 1 \pmod 4$ | 5 | $c_4' + 4c_6' \equiv 9, 13 \pmod{16}$ |
| $\mathrm{I}_3^*$ | 6 | $\geq 11$ | 12 | $c_4' \equiv 1 \pmod 4$ | 5 | $c_4' + 4c_{6,10} \equiv 5, 9 \pmod{16}$ |
| $\bullet\mathrm{I}_4^*$ | 4 | 6 | 12 | $c_6' \equiv 1 \pmod 4$ | 4 | $-1$ |
| $\mathrm{I}_4^*$ | 6 | 9 | 14 | | 6 | $\Delta' \equiv c_6' \pmod 4$ |
| $\mathrm{I}_5^*$ | 6 | 9 | 15 | | 6 | $\Delta' \equiv 3 \pmod 4$ |
| $\mathrm{I}_n^*$ | 6 | 9 | $n + 10$ | $n > 5$ | 6 | $c_6' \equiv 3 \pmod 4$ |

Venons-en à la définition des signes locaux. Soit $E$ une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}_p$. Notons $\mathcal{W}$ le groupe de Weil de $\mathbf{Q}_p$ : $\overline{\mathbf{Q}}_p$ étant une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$, on peut identifier $\mathcal{W}$ au sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ formé des éléments induisant sur le corps résiduel de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ une puissance entière du Frobenius. La topologie de $\mathcal{W}$ est celle pour laquelle le groupe d'inertie $I$, muni de sa topologie naturelle, est ouvert dans $\mathcal{W}$. Soit $\ell$ un nombre premier distinct de 2 et $p$. La représentation naturelle de $\mathcal{W}$ dans le module de Tate $\mathrm{T}_\ell(E)$ induit, via un plongement de $\mathbf{Z}_\ell$ dans $\mathbf{C}$, une représentation de $\mathcal{W}$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$, dont la contragrédiente sera notée $\sigma$. Supposons d'abord que l'invariant modulaire $j$ de $E$ soit *entier*: $E$ a potentiellement bonne réduction. Alors $\sigma$ est continue (ceci se déduit du critère de Néron–Ogg–Shafarevitch) et semi-simple (*voir* [8], prop. 2). Soient $\psi$ : $\mathbf{Q}_p \to \mathbf{C}^*$ un caractère (continu) non trivial de $\mathbf{Q}_p$ et $\mathrm{d}x$ une mesure de Haar sur $\mathbf{Q}_p$. On pose :

$$W_p(E) = \frac{\varepsilon(\sigma, \psi, \mathrm{d}x)}{|\varepsilon(\sigma, \psi, \mathrm{d}x)|}, \tag{2}$$

Tableau 2. – Signe local $W_3$.

*Table 2. – Local root number $W_3$.*

| Kod. | $v(c_4)$ | $v(c_6)$ | $v(\Delta)$ | Condition spéciale | $v(N)$ | $W_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| II | $\geq 2$ | 3 | 3 | ${c'_6}^2 + 2 \not\equiv 3c_{4,2} \pmod 9$ | 3 | $c'_6 \equiv 4, 7, 8 \pmod 9$ |
| II | 2 | 4 | 3 | | 3 | $c'_4 \not\equiv c'_6 \pmod 3$ |
| II | 2 | 3 | 4 | | 4 | 1 |
| II | $\geq 3$ | 4 | 5 | | 5 | $c'_6 \equiv 2 \pmod 3$ |
| III | $\geq 2$ | 3 | 3 | ${c'_6}^2 + 2 \equiv 3c_{4,2} \pmod 9$ | 2 | 1 |
| III | 2 | $\geq 5$ | 3 | | 2 | 1 |
| IV | 2 | 3 | 5 | | 3 | $\Delta' \equiv c'_6 \pmod 3$ |
| IV | 3 | 5 | 6 | | 4 | $c'_4 \equiv 2 \pmod 3$ |
| IV | $\geq 4$ | 5 | 7 | | 5 | $c'_6 \equiv 2 \pmod 3$ |
| IV* | 4 | 6 | 9 | ${c'_6}^2 + 2 \not\equiv 3c_{4,4} \pmod 9$ | 3 | $c'_6 \equiv 4, 8 \pmod 9$ |
| IV* | $\geq 5$ | 6 | 9 | ${c'_6}^2 + 2 \not\equiv 3c_{4,4} \pmod 9$ | 3 | $c'_6 \equiv 1, 2 \pmod 9$ |
| IV* | 4 | 7 | 9 | | 3 | $c'_6 \equiv 2 \pmod 3$ |
| IV* | 4 | 6 | 10 | | 4 | $c'_6 \equiv \pm 2 \pmod 9$ |
| IV* | $\geq 5$ | 7 | 11 | | 5 | $c'_6 \equiv 1 \pmod 3$ |
| III* | $\geq 4$ | 6 | 9 | ${c'_6}^2 + 2 \equiv 3c_{4,4} \pmod 9$ | 2 | 1 |
| III* | 4 | $\geq 8$ | 9 | | 2 | 1 |
| II* | 4 | 6 | 11 | | 3 | $c'_6 \equiv 1 \pmod 3$ |
| II* | 5 | 8 | 12 | | 4 | 1 |
| II* | $\geq 6$ | 8 | 13 | | 5 | $c'_6 \equiv 1 \pmod 3$ |
| $\bullet \mathrm{I}_0^*$ | 2 | 3 | 6 | | 2 | $-1$ |
| $\bullet \mathrm{I}_0^*$ | 3 | $\geq 6$ | 6 | | 2 | $-1$ |

où $\varepsilon(\sigma, \psi, \mathrm{d}x) \in \mathbf{C}^*$ est la constante locale définie par Deligne ([4], th. 4.1). La condition (2) de [4], th. 4.1, montre que $W_p(E)$ ne dépend pas du choix de $\mathrm{d}x$ ; la formule 5.4 de loc. cit. montre que $W_p(E)$ ne dépend pas du choix de $\psi$, parce que $\det \sigma$ est à valeurs réelles positives. Enfin, d'après [10], corollaire p. 499, $W_p(E)$ ne dépend pas du choix de $\ell$ et de plus c'est un nombre réel, il vaut donc $\pm 1$.

Cette définition de $W_p(E)$ dans le cas où $E$ a potentiellement bonne réduction est la seule dont nous ayons besoin ici. Lorsque l'invariant $j$ de $E$ n'est pas entier, le groupe de Weil doit être remplacé par le groupe de Weil–Deligne (*voir* [4], §8, ou [11], §4) et $\sigma$ modifiée en conséquence (*voir* [8], §3). Pour le cas réel, voir [8], prop. 1.

La formule (1) est classique, il ne semble cependant pas facile d'en donner une référence précise. Disons que sa démonstration utilise les résultats de Carayol déjà cités et, en amont, les liens connus entre formes modulaires de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$, représentations de $\mathrm{GL}(2)$ et représentations $\ell$-adiques (notamment le fait que la correspondance locale de Langlands, établie en général pour $\mathrm{GL}(2)$ par Kutzko [6] respecte les facteurs $\varepsilon$). Le lecteur pourra consulter [9] et aussi [5], pour une synthèse récente.

Nous ne pouvons détailler ici les calculs ayant conduit aux tableaux ci-après. Précisons seulement que nous avons utilisé une méthode indirecte (la méthode directe, *voir* [8] dans les cas abéliens, mène à des calculs très longs). Soit par exemple $E$ une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}_2$, on suppose que $E$ a mauvaise réduction de type additif et que l'invariant modulaire $j$ de $E$ est entier. On choisit une courbe elliptique $E'$ sur $\mathbf{Q}$, assez proche 2-adiquement de $E$ pour que $W_2(E') = W_2(E)$. La difficulté consiste bien sûr à préciser ce que signifie « assez proche », on se sert pour cela du lemme de Hensel. On impose à $E'$ d'être de Weil ; c'est le cas si $E'$ a bonne réduction en 3 (résultats non publiés de B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor). On s'arrange aussi pour que le signe $\varepsilon'$ de l'équation fonctionnelle pour $E'$ soit $-1$. Pour cela, supposant que $\varepsilon' = 1$, on vérifie, en calculant $L_{E'}(1)$ et quelques coefficients $a_p(E')$, que la formule (2.8.10) de [3] se trouve contredite. La formule (1) permet alors de calculer $W_2(E') = W_2(E)$. La méthode est la même lorsque $p = 3$, avec une nuance importante : dans l'état actuel, on ne peut plus imposer aux courbes $E'$ d'être de Weil. Nos résultats concernant $W_3$ ne sont donc valides que si l'on admet qu'un certain nombre fini de courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$, de conducteur multiple de 27, sont de Weil. Si tel est le cas, le tableau 1 donnera $W_3(E)$, ceci pour *toute* courbe elliptique $E$ sur $\mathbf{Q}_3$. Indiquons que, pour les 17583 courbes elliptiques modulaires de conducteur $\leq 5077$, dont la liste (à isogénie près) a été établie par Cremona (jusqu'au conducteur 1000, ces tables se trouvent dans [3], ensuite elles sont disponibles sur serveur ftp), les valeurs de $W_2$ et $W_3$ que nous donnons ici conduisent à un signe $\varepsilon$ en accord avec celui de loc. cit. À ce propos, signalons que G. Henniart et J.F. Mestre ont effectué ce calcul de $W_2$ et $W_3$, par une méthode semble-t-il voisine de la nôtre, il y a plusieurs années ; leurs résultats n'ont pas été publiés (l'absence des tables de Cremona rendait sans doute alors les vérifications systématiques nécessaires moins commodes...).

Voici enfin quelques explications concernant la lecture des tableaux 1 et 2. Lorsque $p = 2$ ou 3, ces tableaux donnent $W_p = W_p(E)$, ceci pour toute courbe elliptique $E$ sur $\mathbf{Q}_p$ non semi-stable ; on a inclus les résultats de [8] et [2] (cas signalés par un •). On suppose $E$ donnée par un modèle *minimal*. On note $v$ la valuation normalisée usuelle sur $\mathbf{Q}_p$. Pour tout $x$ appartenant à $\mathbf{Q}_p$ et tout entier $k$, on pose $x_k = x/p^k$ ; si $x \neq 0$ et $k = v(x)$, $x_k$ est noté $x'$. Les cas possibles sont classés en fonction du symbole de Kodaira (colonne Kod.) ; lorsque le triplet $(v(c_4), v(c_6), v(\Delta))$ ne suffit pas pour déterminer ce symbole, une condition supplémentaire (colonne condition spéciale) permet d'assurer que le symbole de Kodaira est celui qui est indiqué (*voir* [7] pour ces conditions). Dans la colonne $W_p$, lorsque le signe $W_p$ n'est pas constant dans le cas considéré, on indique *une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit égal à* 1.

## Références bibliographiques


[1] Carayol H., Sur les représentations $\ell$-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 19 (1986) 409–468.

[2] Connell I., Calculating Root Numbers of Elliptic Curves over $\mathbf{Q}$, Manusc. Math. 82 (1994) 93–104.

[3] Cremona J.E., Algorithms for modular elliptic curves, Cambridge Univ. Press, 2ème édition, 1997.

[4] Deligne P., Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions $L$, Modular Functions of One Variable II, Lect. Notes in Math. 349, Springer, 1973, pp. 501–595.

[5] Diamond F., Im J., Modular forms and modular curves, In: Seminar on Fermat's last theorem, CMS Conf. Proc. 17, Amer. Math. Soc., 1995.

[6] Kutzko P., The local Langlands conjecture for GL(2), Ann. Math 112 (1980) 381–412.

[7] Papadopoulos I., Sur la classification de Néron des courbes elliptiques en caractéristique résiduelle 2 et 3, J. Number Theory 44 (2) (1993) 119–152.

[8] Rohrlich D.E., Variation of the root number in families of elliptic curves, Compos. Math. 87 (1993) 119–151.

[9] Serre J.-P., Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures), Séminaire Delange–Pisot–Poitou 1969/70, n° 19.

[10] Serre J.-P., Tate, J., Good reduction of abelian varieties, Ann. Math. 88 (1968) 492–517.

[11] Tate J., Number theoretic background, Automorphic Forms, Representations, and $L$-Functions, Proc. Symp. Pure Math. 33 (2) (1979) 3–26.