CHAPITRE I

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

§ 1. Variétés différentielles

1. Cartes

Soit X un ensemble. On appelle *carte de* X un triplet $c = (\mathrm{U}, \varphi, \mathrm{E})$, où U est une partie de X, E un espace vectoriel réel de dimension finie et φ une bijection de U sur un ouvert de E. On dit que U est le *domaine de la carte* et que la dimension n de E est la *dimension de la carte*.

Soient $c = (\mathrm{U}, \varphi, \mathrm{E})$ et $c' = (\mathrm{U}', \varphi', \mathrm{E}')$ deux cartes de X. L'application de $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ sur $\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ qui à x associe $\varphi'(\varphi^{-1}(x))$ est appelée *l'application de changement de carte de* c *à* c'.

Deux cartes c et c' sont dites C^∞ -*compatibles*, ou simplement *compatibles*, si :

a) les ensembles $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ et $\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ sont ouverts dans E et E′ respectivement ;

b) les *applications de changement de carte* de c à c' et de c' à c sont de classe C^∞.

2. Atlas

Soit X un ensemble. On appelle *atlas de classe* C^∞ de X, ou simplement *atlas* de X, un ensemble de cartes de X deux à deux C^∞-compatibles dont les domaines recouvrent X. Deux atlas de X sont dits C^∞ -*équivalents*, ou simplement *équivalents*, si leur réunion est un atlas, *i.e.* si chaque carte de l'un est compatible à chaque carte de l'autre. C'est une relation d'équivalence entre atlas de classe C^∞ de X.

3. Variétés différentielles

On appelle *variété différentielle de classe* C^∞, ou simplement *variété différentielle*, un ensemble X muni d'une classe d'atlas C^∞-équivalents. Tout atlas de cette classe est appelé un *atlas de la variété* X, et toute carte d'un de ces atlas est appelée une *carte de la variété* X.

Soient $\mathscr{A}$ un atlas d'une variété différentielle X. Pour qu'une *carte de l'ensemble* X soit une *carte de la variété* X, il faut et il suffit qu'elle soit C^∞ -compatible à toute carte appartenant à l'atlas $\mathscr{A}$.

4. Topologie d'une variété différentielle

Soit X une variété différentielle. Il existe une unique topologie sur X telle que, pour toute carte $(\mathrm{U}, \varphi, \mathrm{E})$ de la variété X, U soit une partie ouverte de X et φ un homéomorphisme de U sur $\varphi(\mathrm{U})$. L'ensemble X muni de cette topologie est appelé *l'espace topologique sous-jacent à la variété* X.

Soit $\mathscr{A}$ un atlas de la variété X. Pour qu'une partie Y de X soit ouverte, il faut et il suffit que, pour toute carte $(\mathrm{U}, \varphi, \mathrm{E})$ appartenant à l'atlas $\mathscr{A}$, l'ensemble $\varphi(\mathrm{Y} \cap \mathrm{U})$ soit ouvert dans E.

Pour que la variété différentielle X soit séparée, il faut et il suffit que, quelles que soient les cartes $(\mathrm{U}, \varphi, \mathrm{E})$ et $(\mathrm{V}, \psi, \mathrm{F})$ appartenant à l'atlas $\mathscr{A}$, l'ensemble des couples $(\varphi(x), \psi(x))$, où $x \in \mathrm{U} \cap \mathrm{V}$, soit fermé dans $\varphi(\mathrm{U}) \times \psi(\mathrm{V})$.

Remarque. — Certains auteurs exigent dans la définition d'une variété différentielle qu'elle soit séparée, d'autres qu'elle soit connexe.

Tout point d'une variété différentielle possède un voisinage ouvert homéomorphe à un espace vectoriel réel de dimension finie, et par conséquent un système fondamental de voisinages compacts et connexes par arcs. Toute variété différentielle est donc un espace topologique localement connexe, et même localement connexe par arcs ; ses composantes connexes sont ouvertes et sont ses composantes connexes par arcs. Si la variété est séparée, elle est localement compacte.

5. Sous-variétés ouvertes

Soient X une variété différentielle et U une partie ouverte de X. Il existe sur U une unique structure de variété différentielle dont les cartes sont les cartes de la variété X ayant pour domaine une partie de U.

L'ensemble U, muni de cette structure de variété différentielle, s'appelle une *sous-variété ouverte de* X. Sa topologie est celle induite par celle de X.

6. Dimension

Soit X une variété différentielle et soit a un point de X. Une carte $(\mathrm{U}, \varphi, \mathrm{E})$ de la variété X est appelée une *carte de* X *en* a si a appartient à U ; elle est dite *centrée en* a si on a de plus $\varphi(a) = 0$. Toutes les cartes de X en a ont une même dimension, que l'on appelle *la dimension de* X *en* a et que l'on note $\dim_a \mathrm{X}$.

En effet, soient $c = (\mathrm{U}, j, \mathrm{E})$ et $c' = (\mathrm{U}', j', \mathrm{E}')$ deux cartes de la variété X en a. Les dérivées des applications de changement de carte de c à c' en $j(a)$ et de c' à c en en $j'(a)$ sont des applications linéaires entre E et E' réciproques l'une de l'autre, donc E et E' ont même dimension.

L'application $x \mapsto \dim_x \mathrm{X}$ est localement constante sur X. Si elle est constante de valeur n, on dit que la variété différentielle X est *pure de dimension* n, ou simplement est *de dimension* n.

Remarques.— 1) Par définition, $\varnothing$ est une variété pure de dimension n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2) Si la variété X est non vide et connexe, elle est pure de dimension n pour un unique entier n.
3) Soit X une variété différentielle. L'ensemble X_n des points de X tels que $\dim_x \mathrm{X} = n$ est une sous-variété ouverte de X et $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une partition de X.

7. Systèmes de coordonnées

Soient X une variété différentielle et U une partie de X. On appelle *système de coordonnées de* X *dans* U une suite finie $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^n)$ de fonctions sur U à valeurs réelles telle que $(\mathrm{U}, \mathbf{u}, \mathbf{R}^n)$ soit une carte de la variété X. Les u^i sont appelées *les fonctions coordonnées* du système.

Si a est un point de U, on dit que $\mathbf{u}$ est *un système de coordonnées de* X *en* a ; si de plus $u^i(a) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$, on dit que $\mathbf{u}$ est *centré en* a.

8. Sous -variétés

Soit X une variété différentielle. Soit Y une partie de X possédant la propriété suivante : pour tout $a \in \mathrm{Y}$, il existe une carte $(\mathrm{U}, \varphi, \mathrm{E})$ de X en a et un sous-espace vectoriel F de E tel que $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{Y}) = \varphi(\mathrm{U}) \cap \mathrm{F}$.

Il existe alors une unique structure de variété différentielle sur Y dont un atlas est formé des cartes $(\mathrm{U} \cap \mathrm{Y}, \varphi', \mathrm{F})$, où $(\mathrm{U}, \varphi, \mathrm{E})$ est une carte de X satisfaisant les conditions de l'alinéa précédent et $\varphi' : \mathrm{U} \cap \mathrm{Y} \to \mathrm{F}$ est l'application induite par φ.

L'ensemble Y, muni de cette structure de variété différentielle, est appelé une *sous-variété de* X. Il est *localement fermé* dans X.

9. Exemples de variétés différentielles

a) *Espaces vectoriels de dimension finie*

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Il existe une unique structure de variété différentielle sur E, dont $(\mathrm{E}, \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, \mathrm{E})$ est une carte. Sauf mention du contraire, E sera toujours muni de cette structure de variété.

b) *Sphères*

Soit E un espace euclidien. La sphère unité S de E (centrée en 0) est une sous-variété compacte de E.

Pour tout $a \in \mathrm{S}$, notons U_a l'ensemble des $x \in \mathrm{S}$ tels que $\langle a, x\rangle > 0$, H_a l'hyperplan de E orthogonal à a et φ_a la restriction à U_a de la projection orthogonale $x \mapsto x - \langle a, x\rangle a$ de E sur H_a. L'ensemble des triplets $(\mathrm{U}_a, \varphi_a, \mathrm{H}_a)$ est un atlas de la variété différentielle S.

Supposons $\mathrm{E} \neq 0$. Choisissons un point n de S (*pôle nord*), notons s son opposé (*pôle sud*) et H l'hyperplan de E orthogonal à n (*hyperplan équatorial*). Posons $\mathrm{U}_s = \mathrm{S} - \{s\}$ et $\mathrm{U}_n = \mathrm{S} - \{n\}$. Notons $\psi_s : \mathrm{U}_s \to \mathrm{H}$ *la projection stéréographique de pôle* s, *i.e.* l'application qui à $x \in \mathrm{U}_s$ associe le point d'intersection de H et de la demi-droite d'origine s passant par x ; de même, notons $\psi_n : \mathrm{U}_n \to \mathrm{H}$ *la projection stéréographique de pôle* n. Les cartes $(\mathrm{U}_s, \psi_s, \mathrm{H})$ et $(\mathrm{U}_n, \psi_n, \mathrm{H})$ forment un atlas de la variété différentielle S.

c) *Produits de variétés différentielles*

Soient X et X' deux variétés différentielles. Il existe sur l'ensemble produit $\mathrm{X} \times \mathrm{X}'$ une unique structure de variété différentielle telle que, pour toute carte $(\mathrm{U}, \varphi, \mathrm{E})$ de X et toute carte $(\mathrm{U}', \varphi', \mathrm{E}')$ de X', $(\mathrm{U} \times \mathrm{U}', \varphi \times \varphi', \mathrm{E} \times \mathrm{E}')$ soit une carte de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}'$. Sa topologie est la topologie produit de celles de X et Y. Sa dimension en un point (a, b) est la somme des dimensions de X en a et de X' en b.

d) *Grassmanniennes*

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. On appelle *grassmannienne des sous-espaces vectoriels de* E *de dimension* k l'ensemble $\mathbf{G}_k(\mathrm{E})$ de ces sous-espaces.

Étant donnée une décomposition en somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{F}_0 \oplus \mathrm{G}_0$ où $\dim \mathrm{F}_0 = k$, notons $\mathrm{U}_{\mathrm{G}_0}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires de G_0, et $\varphi_{\mathrm{F}_0,\mathrm{G}_0} : \mathrm{U}_{\mathrm{G}_0} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathrm{F}_0, \mathrm{G}_0)$ l'application qui à $\mathrm{F} \in \mathrm{U}_{\mathrm{G}_0}$ associe l'unique application linéaire $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathrm{F}_0, \mathrm{G}_0)$ dont F est le graphe, *i.e.* telle que $\mathrm{F} = \{x + u(x) | x \in \mathrm{F}_0\}$. L'application $\varphi_{\mathrm{F}_0,\mathrm{G}_0}$ est bijective. Le triplet $(\mathrm{U}_{\mathrm{G}_0}, \varphi_{\mathrm{F}_0,\mathrm{G}_0}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathrm{F}_0, \mathrm{G}_0))$ est une carte de l'ensemble $\mathbf{G}_k(\mathrm{E})$ centrée en F_0.

Ces cartes forment un atlas, qui définit une structure de variété différentielle sur $\mathbf{G}_k(\mathrm{E})$. Cette variété est séparée, pure de dimension $k(n-k)$.

Démonstration de la compatibilité des cartes

Soient $\mathrm{F}_0 \oplus \mathrm{G}_0$ et $\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{G}_1$ deux décompositions en somme directe de E, avec $\dim \mathrm{F}_0 = \dim \mathrm{F}_1 = k$. Notons $p : \mathrm{E} \to \mathrm{F}_1$ et $q : \mathrm{E} \to \mathrm{G}_1$ les projections associées à la seconde de ces décompositions. L'ensemble $\mathsf{j}_{\mathrm{F}_0,\mathrm{G}_0}(\mathrm{U}_{\mathrm{G}_0} \cap \mathrm{U}_{\mathrm{G}_1})$ se compose des applications linéaires $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathrm{F}_0,\mathrm{G}_0)$ telles que $\{x + u(x) | x \in \mathrm{F}_0\}$ soit supplémentaire de G_1, *i.e.* telles que l'application $a(u) : x \mapsto p(x + u(x))$ de F_0 dans F_1 soit bijective. Il est ouvert dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathrm{F}_0,\mathrm{G}_0)$, puisque $\mathrm{Isom}_{\mathbf{R}}(\mathrm{F}_0,\mathrm{F}_1)$ est ouvert dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathrm{F}_0,\mathrm{F}_1)$ et que l'application $u \mapsto a(u)$ est continue (car affine). De même $\mathsf{j}_{\mathrm{F}_1,\mathrm{G}_1}(\mathrm{U}_{\mathrm{G}_0} \cap \mathrm{U}_{\mathrm{G}_1})$ est ouvert dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathrm{F}_1,\mathrm{G}_1)$.

Notons $i : F_0 \to E$ et $j : G_0 \to E$ les injections canoniques. L'application de changement de cartes de $c_0 = (U_{G_0}, \mathsf{j}_{F_0,G_0}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(F_0,G_0))$ à $c_1 = (U_{G_1}, \mathsf{j}_{F_1,G_1}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(F_1,G_1))$ associe à $u \in \mathsf{j}_{F_0,G_0}(U_{G_0} \cap U_{G_1})$ l'application $v \in \mathsf{j}_{F_1,G_1}(U_{G_0} \cap U_{G_1})$ caractérisée par : $v(p(x+u(x))) = q(x+u(x))$ pour $x \in F_0$. En d'autres termes, on a $v = b(u) \circ a(u)^{-1}$, où $a(u) = p \circ (i + j \circ u)$ et $b(u) = q \circ (i + j \circ u)$. Comme $t \mapsto t^{-1}$ est une application de classe C^∞ de $\mathrm{Isom}_{\mathbf{R}}(F_0,F_1)$ dans $\mathrm{Isom}_{\mathbf{R}}(F_1,F_0)$, les formules précédentes montrent que l'application de changement de cartes est de classe C^∞ , *i.e.* que c_0 et c_1 sont C^∞-compatibles.

Vérification du critère de séparation

L'ensemble T des couples $(\mathsf{j}_{F_0,G_0}(F), \mathsf{j}_{F_1,G_1}(F))$, où $F \in U_{G_0} \cap U_{G_1}$, est l'ensemble des couples $(u,v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(F_0,G_0) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(F_1,G_1)$ tels que $v \circ a(u) = b(u)$: en effet, lorsque cette relation est satisfaite, le noyau de $a(u)$ est contenu dans celui de $a(u)+b(u) = i+j \circ u$, donc est nul, et l'application $a(u)$ est bijective. L'ensemble T est donc fermé dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(F_0,G_0) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(F_1,G_1)$.

Exercice. — Démontrer que la variété $\mathbf{G}_k(E)$ est compacte.

e) *Espaces projectifs*

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n+1$. La grassmannienne des droites de E se note $\mathbf{P}(E)$ et s'appelle l'espace projectif associé à E. C'est une variété différentielle séparée (et même compacte) de dimension n.

Exercice. — On note $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathbf{R}^{n+1})$. Indexons les coordonnées de $\mathbf{R}^{n+1}$ par l'ensemble $\{0,1,\ldots,n\}$. Pour $0 \leq i \leq n$, notons U_i l'ensemble des droites de $\mathbf{R}^{n+1}$ qui ne sont pas contenues dans l'hyperplan d'équation $x_i = 0$; notons $\mathsf{j}_i : U_i \to \mathbf{R}^n$ l'application qui à $D \in U_i$ associe l'unique élément $(x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ de $\mathbf{R}^n$ tel que $(x_0,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n) \in D$. Démontrer que les applications j_i sont bijectives et que les cartes $(U_i,\mathsf{j}_i,\mathbf{R}^n)$ forment un atlas de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$.

f) *Droite réelle avec origine dédoublée*

Notons X la réunion de $\mathbf{R}^*$ et d'un ensemble à deux éléments $\{O_1, O_2\}$. Pour $i \in \{1,2\}$, notons U_i le sous-ensemble $\mathbf{R}^* \cup \{O_i\}$ de X et $\varphi_i : U_i \to \mathbf{R}$ l'application qui coïncide avec l'identité dans $\mathbf{R}^*$ et applique O_i sur 0. Les cartes $(U_1, \varphi_1, \mathbf{R})$ et $(U_2, \varphi_2, \mathbf{R})$ forment un atlas, qui définit sur X une structure de variété différentielle. Cette variété, appelée *la droite réelle avec origine dédoublée*, n'est pas séparée.

§ 2. Autres notions de variétés

1. Variétés différentielles de classe C^k, avec k entier ≥ 1

La définition d'une *variété différentielle de classe* C^k, où k est un entier ≥ 1, est analogue à celle d'une variété différentielle de classe C^∞, sauf que l'on remplace dans toutes les définitions C^∞ par C^k.

Si X est une variété différentielle de classe C^∞, il existe une unique variété différentielle de classe C^k ayant le même espace topologique sous-jacent et telle que tout atlas de X en soit un de cette nouvelle variété. On dit qu'elle s'obtient *par affaiblissement de la structure de variété de* X.

De même, une variété différentielle de classe C^k définit par affaiblissement de structure une variété différentielle de classe C^l pour $1 \leq l \leq k$.

2. Variétés topologiques

On appelle *variété topologique* un espace topologique dont tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à un espace $\mathbf{R}^n$.

Si l'on appelle applications de classe C^0 les applications continues, on peut définir les variétés topologiques en remplaçant C^∞ par C^0 dans la définition des variétés différentielles. Pour cette raison les variétés topologiques sont aussi parfois appelées *variétés de classe* C^0 .

La définition de la dimension d'une variété topologique en un de ses points est plus délicate que pour les variétés différentielles : pour démontrer que deux cartes en ce point ont la même dimension, on a besoin du théorème de l'invariance du domaine de Brouwer (1) , qui affirme que toute partie de $\mathbf{R}^n$ homéomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^n$ est elle-même ouverte dans $\mathbf{R}^n$.

3. Variétés analytiques réelles

Les *variétés analytiques réelles* se définissent comme les variétés différentielles, sauf que l'on remplace dans toutes les définitions "de classe C^∞ " par "analytique". On utilise parfois le qualificatif "de classe C^ω " comme synonyme de "analytique".

Toute variété analytique réelle définit par affaiblissement de structure une variété différentielle de classe C^∞ .

4. Variétés analytiques complexes

Les *variétés analytiques complexes* se définissent comme les variétés analytiques réelles, sauf que les espaces vectoriels qui interviennent dans les cartes sont des espaces vectoriels sur $\mathbf{C}$ et que les applications de changement de carte sont analytiques complexes.

Une variété analytique complexe de dimension 1 est appelée *une surface de Riemann.*

Remarques. — 1) Il n'y a pas lieu dans le cas complexe de considérer des variétés de classe C^∞ ou C^k pour $k \geq 1$: en effet toute fonction complexe sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$ qui est dérivable au sens complexe par rapport à chacune des coordonnées est automatiquement analytique.

2) On définit de manière analogue les variétés analytiques sur un corps commutatif valué ultramétrique, complet et non discret.

3) Toute variété analytique complexe définit par oubli de la structure complexe une variété analytique réelle de dimension double ayant le même ensemble sous-jacent.

(1) L. E. J. Brouwer, *Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets*, Math. Ann. **71** (1912), 146-152.

5. Variétés banachiques

On peut généraliser toutes les notions précédentes à la dimension infinie, en autorisant les espaces vectoriels intervenant dans les cartes à être des espaces de Banach. On parle dans ce cas de *variétés banachiques.* Par opposition, celles dont les cartes ne font intervenir que des espaces vectoriels de dimension finie sont alors dites *localement de dimension finie.*

La généralisation au cas où les espaces de Banach sont remplacés par des espaces de Fréchet s'avère parfois nécessaire, mais est beaucoup plus délicate.

§ 3. Fonctions de classe C^r et morphismes de variétés

Sauf précision contraire, les variétés différentielles considérées dans la suite seront de classe C^∞ *.*

1. Fonctions de classe C^r

Soit X une variété différentielle. Soit f une fonction sur X à valeurs dans un espace vectoriel réel F de dimension finie (ou plus généralement dans un espace de Banach). Si $c = (\mathrm{U}, \varphi, \mathrm{E})$ est une carte de la variété X, l'application $x \mapsto f(\varphi^{-1}(x))$ de $\varphi(\mathrm{U})$ dans F est appelée *l'expression de* f *dans la carte* c *.*

Soit $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. La fonction f est dite *de classe* C^r si son expression dans toute carte de la variété X est de classe C^r. Il suffit qu'il en soit ainsi pour les cartes d'un atlas de la variété X.

Les fonctions de classe C^r de X dans $\mathbf{R}$ sont appelées *les fonctions réelles de classe* C^r *sur* X. Elles forment une $\mathbf{R}$-algèbre notée $\mathscr{C}^r(\mathrm{X})$. Les fonctions de classe C^r de X dans $\mathbf{C}$ sont appelées *les fonctions complexes de classe* C^r *sur* X.

On définit de manière analogue la notion de fonction de classe C^r sur une variété de classe C^k, lorsque k et r appartiennent à $\mathbf{N} \cup \{\infty, \mathsf{w}\}$ et que $r \leq k$. (Par convention, ∞ est inférieur à w).

2. Le faisceau des fonctions de classe C^r

Soient X une variété différentielle et $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Pour tout ouvert U de X, $\mathscr{C}^r(\mathrm{U})$ est une $\mathbf{R}$-algèbre ; si V est un ouvert contenu dans U, l'application de restriction $f \mapsto f|\mathrm{V}$ est un homomorphisme d'algèbres de $\mathscr{C}^r(\mathrm{U})$ dans $\mathscr{C}^r(\mathrm{V})$; si U est la réunion d'une famille d'ouverts (U_i), toute fonction $f : \mathrm{U} \to \mathbf{R}$ dont la restriction à chacun des U_i est de classe C^r, est elle-même de classe C^r.

Ces algèbres et homomorphismes de restriction définissent donc un faisceau de $\mathbf{R}$-algèbres sur X. On l'appelle *le faisceau sur* X *des fonctions réelles de classe* C^r.

Un autre point de vue sur les variétés

Soient X un espace topologique et $\mathscr{A}$ un sous-faisceau du faisceau sur X des fonctions à valeurs réelles. Pour qu'il existe une variété différentielle dont X est l'espace topologique sous-jacent et $\mathscr{A}$ le faisceau des fonctions de classe C^∞, il faut et il suffit que chaque point de X possède un voisinage U tel que $(U,\mathscr{A}|U)$ soit isomorphe à un ouvert d'un espace $\mathbf{R}^n$ muni de son faisceau des fonctions de classe C^∞. Cette variété est alors unique.

On peut donc définir de manière alternative les variétés différentielles comme les espaces annelés $(X,\mathscr{A})$ satisfaisant les conditions ci-dessus.

3. Morphismes de variétés

Soient X et Y deux variétés différentielles et f une application de X dans Y.

Soient $c = (U, \varphi, E)$ et $c' = (V, \psi, F)$ des cartes de X et Y respectivement telles que $f(U) \subset V$. L'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ est appelée *l'expression de f dans ces cartes.*

Lorsque ces cartes sont définies par des systèmes de coordonnées $\mathbf{u} = (u^1,...,u^m)$ dans U et $\mathbf{v} = (v^1,...,v^n)$ dans V, f s'exprime par la suite $(f^1,...,f^n)$ de fonctions réelles sur $\mathbf{u}(U)$ caractérisées par $v^i \circ f = f^i \circ (u^1,...,u^m)$.

Soit $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. On dit que l'application $f : X \to Y$ *est de classe* C^r si son expression dans tout couple de cartes satisfaisant les conditions ci-dessus est de classe C^r. Il suffit qu'il en soit ainsi pour un ensemble de couples (c, c') pour lequel les domaines des cartes c recouvrent X.

Le composé de deux applications de classe C^r entre variétés différentielles est de classe C^r.

Remarques. — 1) Lorsque Y est la variété différentielle sous-jacente à un espace vectoriel réel de dimension finie, la notion introduite ici coïncide avec celle du n° 1.

2) On définit de manière analogue la notion d'application de classe C^r entre variétés de classe C^k, lorsque r et k sont des éléments de $\mathbf{N} \cup \{\infty,\omega\}$ tels que $r \leq k$.

Une application de classe C^∞ de X dans Y est aussi appelée un morphisme de variétés (différentielles de classe C^∞). Si elle est bijective et que sa réciproque est de classe C^∞, c'est un isomorphisme (de variétés différentielles de classe C^∞), aussi appelé un C^∞-*difféomorphisme*, ou simplement un *difféomorphisme.*

Exemples. — 1) Soient X une variété différentielle et Y une sous-variété de X. L'injection canonique $i : Y \to X$ est un morphisme de variétés. Soit Z une variété différentielle et f une application de Z dans Y ; pour que f soit un morphisme de variétés, il faut et il suffit que $i \circ f$ en soit un.

2) Soient X et Y deux variétés différentielles. Les projections de $X \times Y$ sur X et Y sont des morphismes de variétés. Soit Z une variété différentielle. Pour qu'une application f de Z dans $X \times Y$ soit un morphisme de variétés, il faut et il suffit que $\mathrm{pr}_1 \circ f$ et $\mathrm{pr}_2 \circ f$ soient des morphismes de variétés.

3) Soient E un espace euclidien et S sa sphère unité. L'application $x \mapsto (\frac{x}{\|x\|},\|x\|)$ de $E - \{0\}$ dans $S \times \mathbf{R}^*$ est un difféomorphisme.

4) Soient X une variété différentielle, U une partie ouverte de X, E un espace vectoriel réel de dimension finie et j une bijection de U sur un ouvert de E. Pour que (U,j ,E) soit une carte de la variété différentielle X, il faut et il suffit que j soit un difféomorphisme de U sur j (U).

5) L'application $x \mapsto x^3$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est bijective et de classe C^∞, mais n'est pas un difféomorphisme.

6) Soient X et Y deux variétés différentielles. Pour qu'une application $f : X \to Y$ soit un morphisme de variétés, il faut et il suffit que son graphe soit une sous-variété de $X \times Y$; cette sous-variété est fermée si la variété Y est séparée. La diagonale d'une variété différentielle X est donc une sous-variété de $X \times X$, fermée si la variété X est séparée.

§ 4. Espaces tangents, applications linéaires tangentes

1. Espace tangent en un point

Soient X une variété différentielle et soit a un point de X. Considérons l'ensemble des couples (c, h), où $c = (U, \varphi, E)$ est une carte de X en a et h un élément de E. On définit une relation d'équivalence dans cet ensemble en considérant deux couples (c, h) et (c', h') comme équivalents si la dérivée au point $\varphi(a)$ de l'application de changement de carte de c à c' applique h sur h'. On appelle *vecteur tangent à* X *en* a une classe d'équivalence pour cette relation.

L'ensemble des vecteurs tangents à X en a se note $T_a(X)$ et s'appelle *l'espace tangent à* X *en* a. Si $c = (U, \varphi, h)$ est une carte de X en a, l'application de E dans $T_a(X)$ qui à $h \in E$ associe la classe du couple (c, h) est bijective. On munit $T_a(X)$ de la structure d'espace vectoriel réel obtenue en transportant celle de E par cette bijection ; elle ne dépend pas du choix de c. La dimension de l'espace vectoriel $T_a(X)$ est égale à la dimension de X en a.

Exemples. — 1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit a un point de E. L'espace tangent à E en a est canoniquement isomorphe à E.

2) Soit U une sous-variété ouverte de X et soit a un point de U. L'espace tangent à U en a s'identifie à celui de X en a.

3) Soit Y une sous-variété de X et soit a un point de Y. L'espace tangent à Y en a s'identifie à un sous-espace vectoriel de $T_a(X)$.

4) Soient E un espace euclidien, S sa sphère unité et a un point de S. L'espace tangent à S en a s'identifie à l'hyperplan de E orthogonal à a.

5) Soient X et Y deux variétés différentielles, a un point de X et b un point de Y. L'espace tangent $T_{(a,b)}(X \times Y)$ s'identifie à $T_a(X) \times T_b(Y)$.

Exercice. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit k un entier naturel $\leq \dim E$. Démontrer que l'espace tangent à la grassmannienne $\mathbf{G}_k(E)$ en un de ses points F est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(F, E/F)$. En déduire que l'espace tangent à l'espace projectif $\mathbf{P}(E)$ en un de ses points D est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(D, E/D)$.

2. Application linéaire tangente

Soient X et Y deux variétés différentielles, f une application de classe C^1 de X dans Y et a un point de X.

Choisissons une carte $c = (\mathrm{U}, \varphi, \mathrm{E})$ de X en a et une carte $c' = (\mathrm{V}, \psi, \mathrm{F})$ de Y en $f(a)$ telles que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$. Considérons l'application de $\mathrm{T}_a(\mathrm{X})$ dans $\mathrm{T}_{f(a)}(\mathrm{Y})$ qui à la classe d'un couple (c, h), où $h \in \mathrm{E}$, associe la classe du couple $(c', \mathrm{D}u(\varphi(a))(h))$, où u est l'expression de f dans les cartes c et c'. Elle est linéaire et ne dépend pas du choix de c et c'. On l'appelle *l'application linéaire tangente à* f *en* a et on la note $\mathrm{T}_a(f)$.

On appelle *rang de* f *en* a et on note $\mathrm{rg}_a f$ le rang de l'application linéaire $\mathrm{T}_a(f)$.

Si Z est une troisième variété différentielle et g une application de classe C^1 de Y dans Z, on a $\mathrm{T}_a(g \circ f) = \mathrm{T}_{f(a)}(g) \circ \mathrm{T}_a(f)$.

Exemples. — 1) Soient E et F des espaces vectoriels réels de dimension finie, U un ouvert de E, V un ouvert de F, f une application de classe C^1 de U dans V et a un point de U. Lorsqu'on identifie $\mathrm{T}_a(\mathrm{U})$ à E et $\mathrm{T}_{f(a)}(\mathrm{V})$ à F, l'application linéaire $\mathrm{T}_a(f)$ s'identifie à la dérivée de f en a.

2) Soient X et Y deux variétés différentielles et f une application de classe C^1 de X dans Y. On a $\mathrm{T}_a(f) = 0$ pour tout $a \in \mathrm{X}$ si et seulement si l'application f est localement constante.

3) Soient X une variété différentielle, Y une sous-variété de X et a un point de Y. Notons i l'injection canonique de Y dans X. Lorsqu'on identifie $\mathrm{T}_a(\mathrm{Y})$ à un sous-espace vectoriel de $\mathrm{T}_a(\mathrm{X})$, $\mathrm{T}_a(i)$ s'identifie à l'injection canonique de $\mathrm{T}_a(\mathrm{Y})$ dans $\mathrm{T}_a(\mathrm{X})$.

4) Soient X et Y des variétés différentielles, a un point de X et b un point de Y. Lorsqu'on identifie $\mathrm{T}_{(a,b)}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$ à $\mathrm{T}_a(\mathrm{X}) \times \mathrm{T}_b(\mathrm{Y})$, les applications $\mathrm{T}_{(a,b)}(\mathrm{pr}_1)$ et $\mathrm{T}_{(a,b)}(\mathrm{pr}_2)$ s'identifient aux projections de $\mathrm{T}_{(a,b)}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$ sur $\mathrm{T}_a(\mathrm{X})$ et $\mathrm{T}_b(\mathrm{Y})$.

5) Soient X et Y des variétés différentielles, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de variétés et a un point de X. L'espace tangent au graphe de f en $(a, f(a))$ s'identifie au graphe de $\mathrm{T}_a(f)$.

6) Soit X une variété différentielle. On appelle *courbe paramétrée de classe* C^1 *dans* X un couple (I, c), où I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et c une application de classe C^1 de I dans X. L'application tangente à c en un point t est une application linéaire de $\mathbf{R}$ dans $\mathrm{T}_{c(t)}(\mathrm{X})$. Elle est déterminée par l'image de 1 ; celle-ci est un vecteur tangent à X en $c(t)$ que l'on note $c'(t)$ ou $\dot{c}(t)$.

3. Espace cotangent en un point

Soit X une variété différentielle et soit a un point de X. Le dual de l'espace vectoriel $\mathrm{T}_a(\mathrm{X})$ est appelé *l'espace vectoriel cotangent à* X *en* a et noté $\mathrm{T}_a(\mathrm{X})^*$. Ses éléments, appelés *vecteurs cotangents à* X *en* a, sont les formes linéaires sur l'espace vectoriel $\mathrm{T}_a(\mathrm{X})$.

4. Différentielle d'une fonction en un point

Soient X une variété différentielle, f une fonction réelle de classe C^1 sur X et a un point de X.

Lorsque l'espace tangent à $\mathbf{R}$ en $f(a)$ est identifié à $\mathbf{R}$, l'application tangente à f en a s'identifie à une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathrm{T}_a(\mathrm{X})$. Celle-ci se note $d_a f$ ou df_a et s'appelle *la différentielle de* f *en* a.

La valeur $d_a f(t)$ de l'application linéaire $d_a f$ en un vecteur tangent $t \in \mathrm{T}_a(\mathrm{X})$ est parfois notée $t.f$.

Soit g une seconde fonction réelle de classe C^1 sur X. On a

$$d_a(f+g) = d_a f + d_a g, \qquad d_a(fg) = f(a) d_a g + g(a) d_a f.$$

Remarque. — Soient X et Y deux variétés différentielles, $h : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application de classe C^1, f une fonction réelle de classe C^1 sur Y et a un point de X. On a $d_a(f \circ h) = d_{u(a)} f \circ \mathrm{T}_a(h)$.

5. Calculs dans un système de coordonnées

Soient X une variété différentielle, a un point de X et $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^n)$ un sytème de coordonnées dans un voisinage ouvert U de a. Il fournit un isomorphisme de l'espace tangent $\mathrm{T}_a(\mathrm{X})$ sur $\mathbf{R}^n$, et donc aussi de l'espace cotangent $\mathrm{T}_a(\mathrm{X})^*$ sur $\mathbf{R}^n$.

La suite $(d_a u^1, \ldots, d_a u^n)$ est une base de l'espace cotangent $\mathrm{T}_a(\mathrm{X})^*$; son l'image par l'isomorphisme précédent est la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

La base duale de $\mathrm{T}_a(\mathrm{X})$ se note $\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial u^n}\right)_a\right)$, ou encore $(\partial_{1,a}, \ldots, \partial_{n,a})$ lorsque cela ne prête pas à confusion. Ses éléments ne sont autres que les classes des couples (c, e_i), où c est la carte $(\mathrm{U}, \mathbf{u}, \mathbf{R}^n)$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Soit f une fonction de classe C^1 sur X. Le nombre réel $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_a .f$ est aussi noté $\frac{\partial f}{\partial u^i}(a)$. Avec ces notations, on a $d_a f = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u^i}(a) d_a u^i$.

6. Application linéaire tangente exprimée dans des systèmes de coordonnées

Soient X et Y deux variétés différentielles, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une aplication de classe C^1, a un point de X, $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^n)$ un sytème de coordonnées de X dans un voisinage ouvert U de a et $\mathbf{v} = (v^1, \ldots, v^m)$ un système de coordonnées de Y dans un ouvert V de Y contenant $f(\mathrm{U})$. Posons $b = f(a)$

Notons $(f^1, \ldots, f^m)$ l'expression de f dans ces systèmes de coordonnées. La matrice de l'application linéaire tangente $\mathrm{T}_a(f)$ dans les bases $(\partial_{1,a}, \ldots, \partial_{n,a})$ de $\mathrm{T}_a(\mathrm{X})$ et $(\partial_{1,b}, \ldots, \partial_{m,b})$ de $\mathrm{T}_b(\mathrm{Y})$ associées aux systèmes de coordonnées précédents est la matrice $(c_{i,j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$, où $c_{i,j}$ est la dérivée partielle d'indice j de f_i au point $\mathbf{u}(a)$. On l'appelle *la matrice jacobienne de* f *en* a dans ces systèmes de coordonnées.