

Théorème de Thalès. Projection dans le plan et dans l'espace, caractère affine des projections.

Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159, France
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

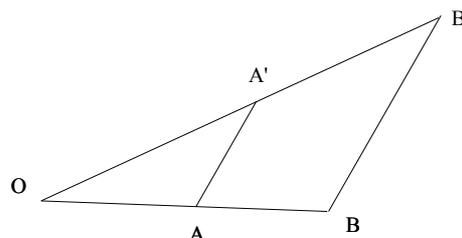
23 juin 2003

On suppose connus les axiomes d'un espace vectoriel et ceux d'un espace affine ainsi que des rudiments de calcul vectoriel. Le Théorème de Thalès est un résultat affine qui doit être présenté dans un cadre affine, c'est-à-dire sans faire intervenir une distance. Le cadre affine suffit pour introduire la notion de mesure algébrique sur une droite donnée : si A et B sont deux points d'une droite D de vecteur directeur \vec{i} , la mesure algébrique du couple (A, B) (associée au choix du vecteur \vec{i}) est, par définition, l'abscisse x du vecteur \overrightarrow{AB} dans la base \vec{i} de \overrightarrow{D} . Autrement dit c'est le réel x tel que $\overrightarrow{AB} = x \vec{i}$, et l'on pose $\overline{AB} = x$.

1 Théorème de Thalès dans le plan

Théorème 1 - Théorème de Thalès dans le triangle.

Soient deux triangles non aplatis OAA' et OBB' tels que $A \in (OB)$ et $A' \in (OB')$. Si (AA') est parallèle à (BB') , alors $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$.



Preuve : Ces égalités proviennent des axiomes d'espace affine et de ceux d'espace vectoriel. En effet, dire que (AA') est parallèle à (BB') signifie qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{AA'}$. Par hypothèse, il existe deux réels α, α' tels que $\overrightarrow{OB} = \alpha\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = \alpha'\overrightarrow{OA'}$, donc

$$\overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}) \Rightarrow \alpha'\overrightarrow{OA'} - \alpha\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OA'} - k\overrightarrow{OA}.$$

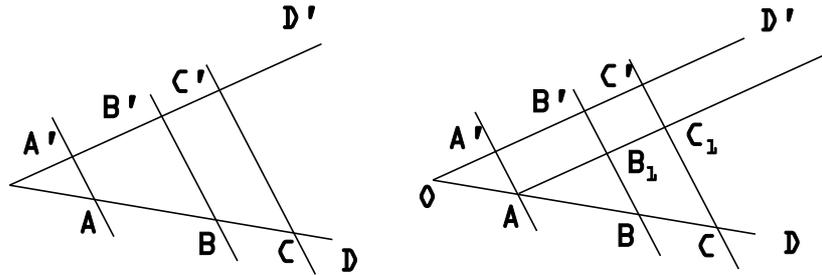
Cela entraîne $\alpha = \alpha' = k$ puisque les vecteurs \overrightarrow{OA} et $\overrightarrow{OA'}$ sont linéairement indépendants. Ainsi $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{AA'}$ fournissent les égalités annoncées (bien entendu, les mesures algébriques sur les droites parallèles (AA') et (BB') sont associées au choix d'un même vecteur directeur de la direction $\mathbb{R}\overrightarrow{AA'}$ commune à ces deux droites). ■

⁰[ctht0001] v1.11 <http://perso.wanadoo.fr/megamaths>

© 2003, D.-J. Mercier. Vous pouvez faire une copie de ces notes pour votre usage personnel.

Théorème 2 - Théorème de Thalès.

Soient D et D' deux droites distinctes, et A, B, C (resp. A', B', C') trois points distincts appartenant à D (resp. D') avec $A \neq A', B \neq B', C \neq C'$. Si les droites (AA') , (BB') , (CC') sont parallèles, alors $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.



Preuve : • Si D et D' sont parallèles, les quadrilatères $AA'B'B$ et $AA'C'C$ sont des parallélogrammes, donc $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ et $\overline{A'C'} = \overline{AC}$. Cela entraîne bien $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ et $\overline{A'C'} = \overline{AC}$ et l'égalité des quotients. Nous avons seulement utilisé le résultat :

$$(AB) // (A'B') \text{ et } (AA') // (BB') \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{AB} \text{ et } \overline{AA'} = \overline{BB'}$$

Montrons-le (la réciproque est triviale et nous fournit la caractérisation vectorielle des parallélogrammes). Par hypothèse, il existe deux réels k et s tels que $\overline{A'B'} = k\overline{AB}$ et $\overline{AA'} = s\overline{BB'}$. Comme $(\overline{AB}, \overline{BB'})$ est une base, les égalités

$$\overline{AB'} = \overline{AB} + \overline{BB'} = \overline{AA'} + \overline{A'B'} = s\overline{BB'} + k\overline{AB}$$

entraînent $k = s = 1$ et la conclusion.

• Si D et D' se coupent en O , le Théorème 1 entraîne

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB} - \overline{OA}}{\overline{OB'} - \overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

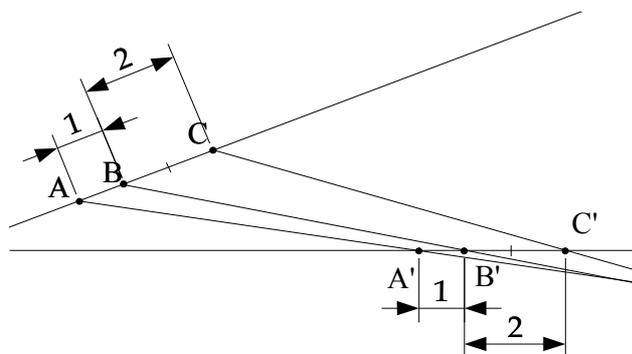
De même $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ et l'on déduit bien $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$. Une autre solution consiste à tracer la parallèle à $(A'B')$ passant par A . Cette parallèle coupe (BB') en B_1 et (CC') en C_1 , et le Théorème 1 entraîne $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ si l'on utilise la première partie de la preuve. ■

Théorème 3 - Réciproque du Théorème de Thalès.

Soient D et D' deux droites distinctes, et A, B, C (resp. A', B', C') trois points distincts appartenant à D (resp. D') avec $A \neq A', B \neq B', C \neq C'$. Si (AA') est parallèle à (BB') et si $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ alors les droites (AA') , (BB') , (CC') sont parallèles.

Preuve : On utilise le sens direct. Soit C'' l'intersection de la droite (AB) et de la parallèle à (AA') passant par C . Le Théorème de Thalès entraîne $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}}$, et comme $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ par hypothèse, on déduit $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$, soit $\overline{A'C''} = \overline{A'C'}$ puis $C'' = C'$. ■

Remarque : L'hypothèse "(AA') est parallèle à (BB')" est primordiale dans la réciproque du Théorème de Thalès, comme le montre le dessin ci-contre pour lequel les rapports sont égaux sans que les droites soient parallèles.



2 Projections dans le plan

Définition 1 Soient D et Δ deux droites sécantes du plan affine \mathcal{P} . La projection sur D parallèlement à Δ est l'application p de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui au point M de \mathcal{P} associe le point M' de Δ tel que (MM') soit parallèle à Δ .

Un tel point M' existe et est unique puisque les droites D et Δ n'ont pas la même direction.

Théorème 4 - Caractère affine des projections (Cas du plan).

L'application $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est affine. Autrement dit si $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ désigne le plan vectoriel associé à \mathcal{P} , l'application

$$\pi : \begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{P}} \\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN} & \longmapsto & \overrightarrow{M'N'} \text{ où } M' = p(M) \text{ et } N' = p(N) \end{array}$$

est linéaire.

Preuve : On montre que π est bien défini et que $\pi(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = \pi(\overrightarrow{MN}) + \pi(\overrightarrow{PQ})$ comme au Théorème 5 qui sera énoncé en dimension finie quelconque. Lorsque nous travaillons dans un plan, nous pouvons déduire les égalités du type $\pi(\lambda \overrightarrow{MN}) = \lambda \pi(\overrightarrow{MN})$ du Théorème de Thalès. En effet si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ posons $\lambda \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{RS}$ et primons les images par p . Si $(MN) // \Delta$ ou si $M = N$, alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{R'S'} = \overrightarrow{0}$ et l'égalité $\overrightarrow{R'S'} = \lambda \overrightarrow{M'N'}$ est triviale. Sinon le Théorème de Thalès permet d'écrire

$$\lambda = \frac{\overline{RS}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{R'S'}}{\overline{M'N'}} \Rightarrow \overrightarrow{R'S'} = \lambda \overrightarrow{M'N'} \Rightarrow \pi(\lambda \overrightarrow{MN}) = \lambda \pi(\overrightarrow{MN}). \blacksquare$$

3 Projections (cas général)

Dans ce paragraphe E représente un espace affine de direction un espace vectoriel de dimension finie \overrightarrow{E} . Si \overrightarrow{F} est un sous-espace vectoriel de \overrightarrow{E} , on note $F = A + \overrightarrow{F}$ le sous-espace affine passant par A de direction \overrightarrow{F} . C'est l'ensemble

$$F = A + \overrightarrow{F} = \left\{ M \in E / \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{F} \right\}.$$

On rappelle que deux sous-espaces vectoriels \vec{F} et \vec{G} sont supplémentaires dans \vec{E} si tout vecteur \vec{u} de \vec{E} s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in \vec{F}$ et $\vec{w} \in \vec{G}$. Dans ce cas, on note $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$. Cela équivaut à dire que $\vec{F} \cap \vec{G} = \{\vec{0}\}$ et $\vec{E} = \vec{F} + \vec{G}$ (ce dernier point signifie que tout vecteur \vec{u} de \vec{E} s'écrit sous la forme $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in \vec{F}$ et $\vec{w} \in \vec{G}$).

Lemme 1 Si F et G sont deux sous-espaces affines de directions \vec{F} et \vec{G} supplémentaires dans \vec{E} , alors $F \cap G$ est un singleton.

Preuve : Notons $F = A + \vec{F}$ et $G = B + \vec{G}$. On a

$$M \in F \cap G \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \vec{F} \text{ et } \overrightarrow{BM} \in \vec{G} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} \in \vec{F} + \vec{G}.$$

Par hypothèse, le vecteur \overrightarrow{AB} se décompose de manière unique sous la forme $\overrightarrow{AB} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in \vec{F}$ et $\vec{w} \in \vec{G}$, donc

$$M \in F \cap G \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \vec{v} + \vec{w} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \vec{v}$$

et l'unicité de $M \in F \cap G$ est assurée. Réciproquement, le point M défini par $\overrightarrow{AM} = \vec{v}$ appartient bien à F , et $\overrightarrow{AB} = \vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AM} + \vec{w}$ entraîne $\overrightarrow{MB} = \vec{w} \in \vec{G}$ soit $M \in G$. On a montré que $M \in F \cap G$. ■

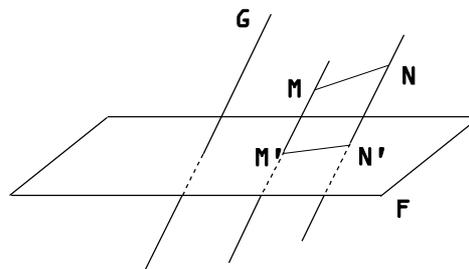
Définition 2 Soient F et G deux sous-espaces affines de directions \vec{F} et \vec{G} supplémentaires dans \vec{E} . La projection sur F parallèlement à \vec{G} (ou à G) est l'application

$$p: E \longrightarrow E \\ M \longmapsto M' \text{ tel que } F \cap (M + \vec{G}) = \{M'\}.$$

Remarque : L'image d'un point par la projection p est caractérisée par :

$$M' = p(M) \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in F \\ \overrightarrow{MM'} \in \vec{G}. \end{cases}$$

Il suffit de traduire ce système en utilisant les coordonnées de M et de M' pour obtenir la représentation analytique de p dans un repère donné.



Théorème 5 - Caractère affine des projections.

La projection $p : E \rightarrow E$ sur F parallèlement à G est une application affine, autrement dit l'application

$$\pi: \begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E} \\ \vec{u} = \overrightarrow{MN} & \longmapsto & \overrightarrow{M'N'} \text{ où } M' = p(M) \text{ et } N' = p(N) \end{array}$$

est linéaire.

Preuve : L'application π est bien défini car $\pi(\vec{u})$ ne dépend pas du choix de M, N tels que $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$. En effet, si $\vec{u} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ et en primant toujours les images par p , on obtient

$$\overrightarrow{M'N'} + (\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{N'N}) = \overrightarrow{P'Q'} + (\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{Q'Q}),$$

et l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans la somme directe $\vec{F} \oplus \vec{G}$ entraîne $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{P'Q'}$.

Montrons maintenant que π est linéaire. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $M, N, P, Q \in E$ sont donnés, on peut trouver deux points R et S tels que $\lambda \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$. On a

$$\lambda \overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{P'Q'} + \lambda (\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{N'N}) + (\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{Q'Q}) = \overrightarrow{R'S'} + (\overrightarrow{RR'} + \overrightarrow{S'S'})$$

d'où $\lambda \overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{R'S'}$ d'après l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans $\vec{F} \oplus \vec{G}$. Cela s'écrit encore $\pi(\lambda \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = \lambda \pi(\overrightarrow{MN}) + \pi(\overrightarrow{PQ})$ et achève la preuve du Théorème. ■

Remarques : 1) On peut court-circuiter la preuve de la linéarité de π dans la démonstration ci-dessus en étudiant d'abord les projections vectorielle. Si \vec{F} et \vec{G} sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans \vec{E} , on appelle projection vectorielle sur \vec{F} parallèlement à \vec{G} l'application $\text{pr} : \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ qui à tout vecteur \vec{u} se décomposant en $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{v} \in \vec{F}$, $\vec{w} \in \vec{G}$, associe le vecteur $\text{pr}(\vec{u}) = \vec{v}$. On vérifie aisément qu'une telle application est linéaire. La décomposition

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'} + (\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{N'N}) \quad \text{où } \overrightarrow{M'N'} \in \vec{F} \text{ et } (\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{N'N}) \in \vec{G}$$

montre que $\text{pr}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$ pour tous points M et N , d'où $\pi = \text{pr}$.

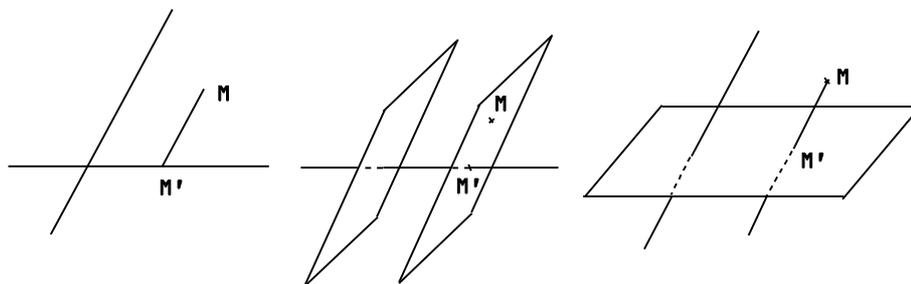
2) Il devient inutile de vérifier que l'application π du Théorème 5 est bien définie si on la définit en posant :

$$\pi : \begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E} \\ \vec{u} = \overrightarrow{OM} & \longmapsto & \overrightarrow{O'M'} \text{ où } M' = p(M) \text{ et } O' = p(O) \end{array}$$

où O désigne un point quelconque fixé à l'avance. Dans ce cas tout vecteur \vec{u} définit un unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et l'image $\pi(\vec{u})$ est parfaitement déterminée par M .

Exemples : Mis à part les projections sur E ou sur $\{\vec{0}\}$ qui offrent peu d'intérêt, les seules projections dans un espace de dimension 2 ou 3 seront

- les projections sur une droite parallèlement à une droite, dans le plan,
- les projections sur une droite parallèlement à un plan, dans l'espace de dimension 3,
- les projections sur un plan parallèlement à une droite, dans l'espace de dimension 3.



Le caractère affine des projections permet d'énoncer le Théorème de Thalès dans un environnement très général valable, en particulier, pour les trois cas de figure ci-dessus.

Théorème 6 - Théorème de Thalès.

Si p est la projection sur F parallèlement à G et si l'on prime les images par p , pour tout réel λ et pour tous points A, B, C ,

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}.$$

Preuve : C'est une simple conséquence de la linéarité de π , puisque

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A'C'} = \pi(\overrightarrow{AC}) = \lambda \pi(\overrightarrow{AB}) = \lambda \overrightarrow{A'B'}. \blacksquare$$

Théorème 7 Soit p la projection sur F parallèlement à G .

- 1) Le sous-espace affine F est l'ensemble des points invariants par p . C'est aussi l'image de p ,
- 2) L'application p est idempotente (i.e. $p \circ p = p$),
- 3) Pour tout $T \in F$ on a $p^{-1}(T) = T + \overrightarrow{G}$,
- 3) L'application p conserve les barycentres,
- 4) L'application p transforme une droite en une droite ou un point, un segment en un segment (éventuellement réduit à un point), et le milieu d'un segment en le milieu du segment projeté.

4 Compléments et approfondissements

4.1 Théorème de Thalès en dimension 3

Le Théorème 6 donne une réponse définitive au problème de la généralisation du Théorème de Thalès dans le cas de n'importe quelle projection, mais le cas particulier de la projection sur une droite parallèlement à un plan nous offre l'occasion de deux démonstrations sympathiques du sens direct et d'une réciproque de Thalès en dimension 3.

Théorème 8 - Théorème de Thalès en dimension 3.

Soient trois plans strictement parallèles Π_A, Π_B, Π_C . Une droite D (resp. D') coupe respectivement ces plans en A, B, C (resp. A', B', C'). Alors $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

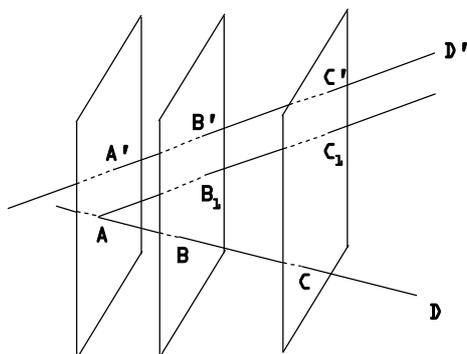
Preuve : La parallèle à D' passant par A coupe resp. les plans Π_A, Π_B, Π_C en A, B_1, C_1 . Les droites D et (AB_1) sont coplanaires et l'on peut appliquer le Théorème de Thalès dans le plan pour obtenir $\frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1}$. Les quadrilatères $AB_1B'A'$ et $AC_1C'A'$ sont des parallélogrammes (montrons par exemple que $AB_1B'A'$ est un parallélogramme : si l'on note t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB_1}$ et $B'' = t(A')$, on sait que l'image du plan Π_A par t est un plan passant par $t(A) = B_1$ et parallèle à Π_A . Donc $t(\Pi_A) = \Pi_B$ et $B'' \in \Pi_B$. Comme B'' est sur la droite passant par A' et parallèle à (AB_1) , i.e. sur D' , on déduit $B'' \in D' \cap \Pi_B$ soit $B'' = B'$) donc $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{A'B'}{A'C'}$ et la conclusion. ■

Théorème 9 - Réciproque du Théorème de Thalès en dimension 3.

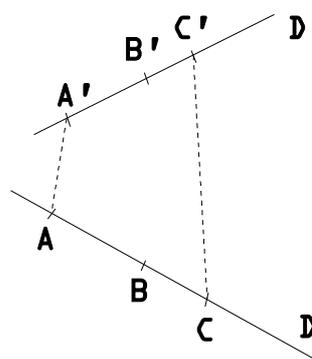
Soient D et D' deux droites distinctes, A, B, C des points distincts sur D et A', B', C' des points distincts sur D' , avec $A \neq A', B \neq B', C \neq C'$. Si $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$, alors les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles à un même plan.

Preuve : Si D et D' sont coplanaires, elles sont incluses dans un même plan Π , et bien entendu les droites (AA') , (BB') , (CC') seront aussi incluses dans Π .

Supposons maintenant que les droites D et D' ne soient pas coplanaires. Dans ce cas les droites (AA') et (CC') ne sont pas coplanaires et il existe un unique plan Π passant par B et parallèle à (AA') et (CC') . La droite D' coupe nécessairement le plan Π en un point B'' (autrement les droites (AA') , (CC') et $(A'B'C')$ seraient parallèles à un même plan, et les points A, A', B', C, C' seraient coplanaires, ce qui est absurde). Le sens direct du Théorème de Thalès entraîne $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B''}{A'C'}$ d'où $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{A'B''}{A'C'}$, puis $B' = B''$. ■



Sens direct



Réciproque

4.2 Figures clé

Deux types de figures sont irrémédiablement liées à la situation de Thalès. Il s'agit des triangles et des trapèzes.

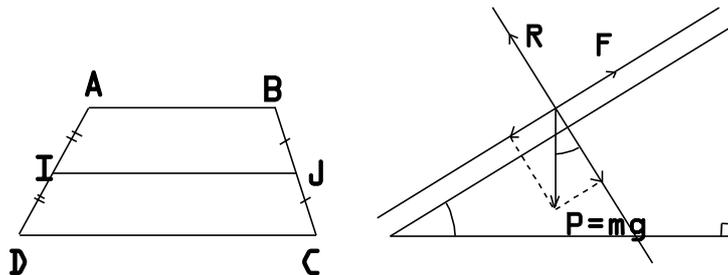
a) Triangle : Le Théorème de la droite des milieux du programme de 4^{ème} des collèges n'est qu'un cas particulier du Théorème de Thalès. Ce Théorème comporte trois volets :

- La droite joignant les milieux des deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.
- Si I (resp. J) est le milieu de $[AB]$ (resp. $[AC]$), alors $BC = 2IJ$.
- La droite passant par le milieu d'un côté d'un triangle et parallèle à un autre côté coupe le troisième côté en son milieu.

b) Trapèze : Si $ABCD$ est un trapèze avec $(AB) // (CD)$, et si I (resp. J) est le milieu de $[AD]$ (resp. $[BC]$), alors

- La droite (IJ) est parallèle aux côtés (AB) et (CD) .
- La droite passant par I et parallèle à (AB) coupe $[BC]$ en J (cet énoncé est parfois présenté comme le Théorème de projection du milieu d'un segment).

Le lecteur intéressé pourra trouver une présentation du Théorème de Thalès basée sur cette propriété du trapèze au paragraphe 4.7.



4.3 Projection de relations vectorielles

L'intérêt du caractère affine des projections réside dans la possibilité de projeter n'importe quelle relation vectorielle. Voici quelques exemples :

1. Chercher les coordonnées barycentriques de l'orthocentre d'un triangle (voir leçon d'oral ctri0002).

2. En projetant la relation exprimant le centre I du cercle inscrit à un triangle ABC comme barycentre des sommets de ce triangle sur l'une des hauteurs, montrer que les coordonnées barycentriques de I dans le repère (A, B, C) sont (a, b, c) où $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ (voir ctri0002 ou le sujet de la deuxième composition du CAPES externe 1996).

3. Loi horaire sur un plan incliné : Une force F constante est appliquée à un point matériel M de masse m sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale (cf. schéma ci-dessus). Exprimer l'abscisse de M à la date t .

Solution : On projette la relation fondamentale de la dynamique

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{\gamma}$$

sur l'axe Ox du mouvement rectiligne. On trouve $-mg \sin \theta + F = mx''$ soit

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{m} - g \sin \theta \right) t^2 + at + b,$$

où les constantes a, b dépendent des conditions initiales, à savoir la vitesse et la position du mobile à la date $t = 0$.

4.4 Construction du point M tel que $\overline{AM}/\overline{AB} = k$

Si k est un nombre rationnel donné, et si les points distincts A et B sont donnés, il est facile d'utiliser la configuration de Thalès pour placer le point M tel que $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = k$. On obtient une construction à la règle et au compas. Le problème de la construction du barycentre de deux points A et B associé aux coefficients α et β (rationnels et de somme non nulle) est essentiellement du même type, puisque $\alpha\overline{MA} + \beta\overline{MB} = 0$ équivaut à

$$\overline{AM} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overline{AB}.$$

De proche en proche, la configuration de Thalès nous fournit une méthode de construction de n'importe quel barycentre d'un nombre fini de points affectés de coefficients rationnels.

4.5 Calculs de longueurs

Le Théorème de Thalès permet de calculer des longueurs inaccessibles. On rappellera l'anecdote suivant laquelle Thalès de Milet, traversant l'Égypte dans une caravane, fut mis au défi de calculer la hauteur exacte de la grande pyramide de Giseh devant laquelle il passait. La mesure de la longueur de l'ombre de la pyramide, puis la mesure de la longueur de l'ombre d'un bâton enfoncé perpendiculairement au sol lui permit de réussir l'épreuve avec brio ! Et l'anecdote est toujours très utilisée en collège, puisqu'elle montre bien l'utilité du Théorème pour le calcul de certaines longueurs "que l'on ne peut pas aller mesurer sur place".

4.6 Théorème de Ménélaüs (via Thalès)

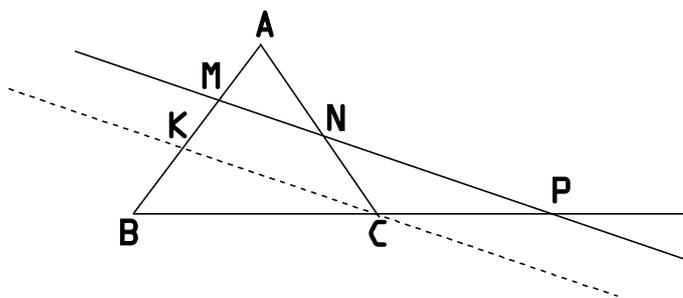
Théorème 10 *Si ABC est un triangle non aplati et si M, N, P désignent trois points appartenant respectivement aux droites (AB) , (AC) , (BC) et distincts des sommets du triangle ABC , alors*

$$M, N, P \text{ alignés} \Leftrightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1. \quad (*)$$

Preuve : (\Rightarrow) La parallèle à (MP) passant par C coupe (AB) en K . Le théorème de Thalès entraîne

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MK}} \text{ et } \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MK}}{\overline{MA}}$$

et il suffit de remplacer dans le premier membre de (*).



(\Leftarrow) Si M, N, P vérifient (*), notons P' l'intersection des droites (MN) et (BC) . Le point P' existe sinon les droites (MN) et (BC) seraient parallèles et le Théorème de Thalès donnerait $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$. Allié à (*) cela entraînerait $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = 1$ soit $B = C$, absurde. Le sens direct du Théorème permet d'écrire

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1.$$

Compte tenu de (*), cela entraîne $\frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$ d'où $P = P'$. ■

4.7 Une alternative pour démontrer Thalès

L'étude de la géométrie dans les classes de collège permet à l'élève de visualiser et de retenir les propriétés de nombreuses figures. En particulier, le cours et les activités ont pour but de préciser toutes les propriétés des quadrilatères "spéciaux" (parallélogrammes, losanges, rectangles, carrés), puis de retenir les propriétés caractéristiques (minimales) qui définissent ces quadrilatères, obtenant ainsi un certain nombre de "définitions équivalentes" d'un même type de quadrilatère.

Le point de départ de notre "chemin vers Thalès" via "le Théorème de la droite des milieux" peut donc être les "propriétés du rectangle". A partir de maintenant, je suppose connues toutes les propriétés du rectangle, ainsi que ses caractérisations usuelles¹. Je sais en particulier :

✓ qu'un quadrilatère dont les diagonales sont égales et se coupent en leur milieu est un rectangle,

✓ qu'un quadrilatère qui possède trois angles droits est un rectangle.

⊃ **Premier impact ! Cercles et triangles rectangles.**

Théorème 11 *Le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle appartient au cercle de diamètre l'hypoténuse.*

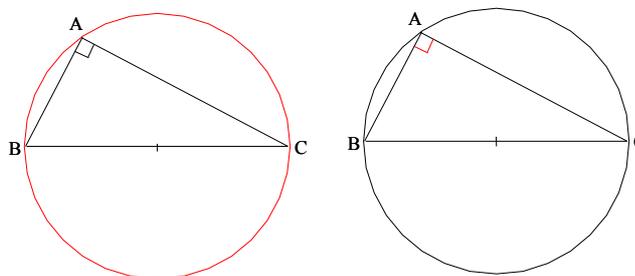
Preuve : Soit ABC un triangle rectangle en A , et I le milieu de $[BC]$. La perpendiculaire à (AB) passant par B coupe la perpendiculaire à (AC) passant par C en W . Le quadrilatère $ABWC$ ainsi construit possède trois angles droits. C'est donc un rectangle, ses diagonales se coupent en leur milieu, et l'on obtient bien $IA = IB = IC$. ■

Théorème 12 *Si A appartient au cercle de diamètre $[BC]$, alors le triangle ABC est rectangle en A .*

Preuve :

Soit I le milieu de $[BC]$. La droite (AI) coupe le cercle en W , et le quadrilatère $ABWC$ possède deux diagonales égales et qui se coupent en leur milieu. C'est donc un rectangle et l'angle \widehat{BAC} est droit. ■

Dans le dessin ci-contre, les hypothèses sont en noir, et les conclusions en rouge.



¹Travailler sur les caractérisations des quadrilatères usuels nous entraînerait trop loin... vers une axiomatique de la droite et du point. Néanmoins, de nombreuses options s'offriraient à nous. Je m'inspire ici d'une excellente publication de l'IREM de Lorraine que j'avais utilisée dans mes classes de quatrième pour "pratiquer de la géométrie", le programme permettant des activités riches et intéressantes à ce niveau. La publication, qui s'intitule "Géométrie en 4e", était le fruit d'un travail en groupe et ne contient malheureusement pas les noms des auteurs ! On pouvait se la procurer en écrivant à l'Université de Nancy 1, IREM de Lorraine, Groupe 1er cycle, Case officielle 140, 54037 Nancy cedex.

⊃ **Deuxième impact ! Théorème de la droite des milieux (DDM).**

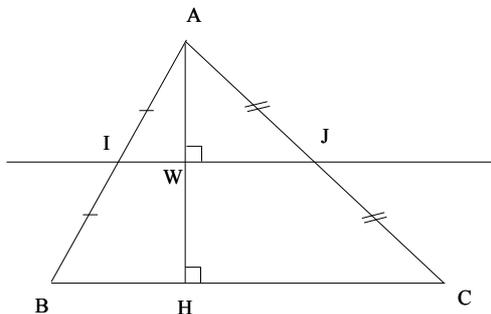
On reconnaît bien sûr le Théorème de Thalès et sa réciproque (en version "hard" pour le triangle) dans le cas d'un rapport 1/2.

Théorème 13

- 1) La droite joignant les milieux des deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.
- 2) Si I (resp. J) est le milieu de $[AB]$ (resp. $[AC]$), alors $BC = 2IJ$.
- 3) La droite passant par le milieu d'un côté d'un triangle et parallèle à un autre côté coupe le troisième côté en son milieu.

Preuve :

1) On considère les notations de la figure ci-contre. Dans le triangle rectangle AHC , le milieu J de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit à AHC , donc $AJ = JH$. Si W désigne le milieu de $[AH]$, (WJ) sera la médiatrice de $[AH]$. De même, on vérifie que (WI) est la médiatrice de $[AH]$. Les points I, W, J sont donc alignés sur une droite perpendiculaire à (AH) , donc parallèle au troisième côté.



2) Plaçons-nous dans le cas de la figure précédente (l'autre cas de figure possible étant laissé en exercice), et notons U (resp. V) le milieu de $[HC]$ (resp. $[HB]$). On vérifie comme précédemment que (UJ) (resp. (VI)) est la médiatrice de $[HC]$ (resp. $[HB]$), de sorte que les quadrilatères $WHUJ$ et $WHVI$ possèdent trois angles droits et soient des rectangles. On déduit $WJ = HU = UC$ et $IW = HV = VB$, et par conséquent (toujours dans ce cas de figure où $H \in [BC]$) :

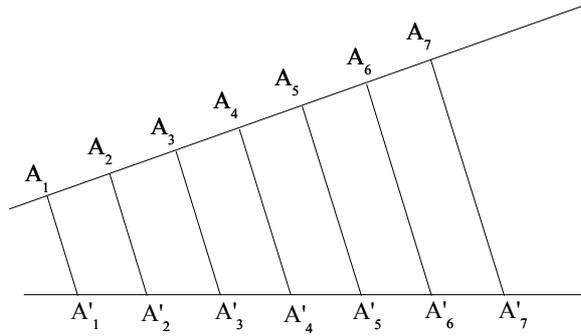
$$BC = BH + HC = 2VH + 2HU = 2IW + 2WJ = 2IJ.$$

3) Si Δ est parallèle à (BC) et contient le milieu I de $[AB]$, elle coupe (AC) en J' . Si J désigne le milieu de $[AC]$, l'assertion 1) montre que (IJ) est parallèle à (BC) . Les droites Δ et (IJ) passent donc toutes les deux par le point I et sont parallèles à (BC) . Elles sont donc égales (d'après les axiomes d'Euclide) et $J' = J$. ■

⊃ **Troisième impact ! Projection d'une graduation régulière.**

Théorème 14 La projection d'une graduation régulière est encore une graduation régulière.

Preuve : Si la division (A_1, \dots, A_n) est régulière et se projette sur la division (A'_1, \dots, A'_n) , le Théorème de projection du milieu d'un segment montre que chaque A'_i est milieu de $[A'_{i-1}A'_{i+1}]$ dès que cela a un sens. Cela entraîne $A'_1A'_2 = \dots = A'_{n-1}A'_n$. ■



⊃ **Quatrième et dernier impact ! Thalès.**

Le Théorème précédent démontre Thalès dans le cas d'un rapport rationnel. Il s'agit maintenant de passer d'un rapport rationnel à un rapport réel quelconque. Pour cela, nous utiliserons les axiomes d'ordre (§ 5.3) et la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

Choisissons trois points A, B, C alignés sur la droite D , trois points A', B', C' alignés sur D' , et supposons les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ parallèles. Si $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = r \in \mathbb{Q}$, la projection des divisions régulières montre que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = r$ et le Théorème de Thalès est démontré dans ce cas.

Supposons maintenant que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = x$ soit réel sans être rationnel. Il existe deux suites de rationnels (r_n) et (s_n) adjacentes qui convergent vers x (par exemple les approximations décimales par défaut et par excès de x à 10^{-n} près), et l'on a $r_n \leq x \leq s_n$ pour tout n . Soient U_n et V_n les points de D tels que $\frac{\overline{AU_n}}{\overline{AC}} = r_n$ et $\frac{\overline{AV_n}}{\overline{AC}} = s_n$. On a $U_n \preceq B \preceq V_n$, donc $U'_n \preceq B' \preceq V'_n$ dans le même ordre en projetant sur D' (axiomes d'ordre du § 5.3), soit

$$\overline{A'U'_n} \leq \overline{A'B'} \leq \overline{A'V'_n}.$$

Ainsi

$$\frac{\overline{A'U'_n}}{\overline{A'C'}} \leq \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} \leq \frac{\overline{A'V'_n}}{\overline{A'C'}}$$

et il suffit de rappeler que $\frac{\overline{A'U'_n}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AU_n}}{\overline{AC}} = r_n$ et $\frac{\overline{A'V'_n}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AV_n}}{\overline{AC}} = s_n$ (Thalès avec des rapports rationnels) pour obtenir

$$r_n \leq \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} \leq s_n,$$

puis

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

en passant à la limite dans ces inégalités.

5 Annexe : la création du Monde

5.1 Le rêve²

Faire de la géométrie, c'est évoluer et raisonner dans un espace dont les objets sont des points, parfois regroupés sur des droites... Pour nous, cet espace est défini de façon axiomatique.

La géométrie euclidienne correspond à l'espace qui nous entoure, appréhendé par nos sens et en tenant compte de notre échelle. Le plan affine euclidien est une bonne modélisation du monde qui nous entoure pour des distances du même ordre de grandeur que notre taille. Mais on sait parfaitement depuis Einstein que la bonne vieille géométrie euclidienne ne rend plus du tout compte des propriétés de l'espace si l'on s'intéresse à des distances... astronomiques. Dans ce cas, la ligne droite ne constitue plus le plus court chemin d'un point à un autre, et les perturbations spatio-temporelles liées à la présence de corps très massiques dans l'espace sont la règle.

Dans un même registre, imaginez-vous un instant transformé en microbe et vous déplaçant sur une feuille de papier quadrillé. Si le dessin d'une droite effectué sur cette feuille semble parfait, notre pauvre petit microbe allant d'un point A vers un point B en restant sur cette droite évoluera sur trois dimensions, et devra monter et descendre chaque fois qu'il traversera "un fleuve d'encre", c'est-à-dire une ligne encrée imprimée sur la feuille. Dans le monde physique, tout est question d'échelle, et la géométrie du microbe-géomètre (être vivant supposé extra-plat) sur la feuille (support extrêmement plissé à son échelle) sera une géométrie riemannienne (autrement dit une géométrie sur une surface dont la métrique est définie par des géodésiques, comme on en reparlera un peu plus loin).

Différentes géométries peuvent être obtenues. Pour cela, il suffit de changer les axiomes de départ, et en particulier le cinquième postulat d'Euclide suivant lequel "par un point on ne peut faire passer qu'une seule parallèle à une droite donnée". On obtient alors :

- la **géométrie de Riemann**, encore appelée **géométrie de la sphère**, où les droites sont les grands cercles de la sphère, et où les triangles sont des triangles sphériques. Pour cette géométrie, le plus court chemin entre deux points A et B de la sphère est la longueur de l'arc le plus court d'extrémités A et B , autrement dit l'un des deux arcs liant A à B et contenu dans un grand cercle de la sphère. Cette géométrie est adaptée à la navigation maritime ou aérienne sur notre petite planète, puisqu'à cette échelle des distances, nous apparaissions comme des animaux extra-plats nous déplaçant sur la surface d'un globe (un petit clin d'oeil à notre microbe-géomètre qui prend sa revanche). Mais au fait, dans quel espace évoluons-nous vraiment ?

- la **géométrie de Lobatchevski**, ou **géométrie de Bolyai** qui peut être concrétisée sur une pseudo-sphère.

En fait, ces deux géométries font intervenir une "courbure de l'espace", le rayon de la sphère dans le cas Riemannien, et une courbure bien évidemment nulle dans le cas euclidien (puisque la courbure d'un plan est nulle).

C'est la géométrie différentielle qui permet d'introduire une infinité de géométries... L'espace sur lequel on va définir "une géométrie" est ici une variété différentielle de dimension 2. On

²On pourra accompagner la lecture de ce paragraphe par l'écoute de l'excellent morceau de Saint-Preux intitulé "Le rêve", dans l'album "La fête triste" :)

imaginera cet espace comme "localement isomorphe à \mathbb{R}^2 ", c'est-à-dire un espace topologique livré avec un atlas constitué de cartes (U_i, φ_i) qui se chevauchent, où les U_i sont des ouverts et où $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^2$ sont des homéomorphismes tels que les changements de cartes $\varphi_i \circ \varphi_j$ soient des applications différentiables d'un ouvert de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . Pour éliminer de nombreux problèmes, imaginons que cette espace est une surface régulière incluse dans notre espace de dimension 3, par exemple une carte en relief de la région, ou tout simplement la surface d'un pneu (que l'on nomme un tore). Si A et B sont deux points de cet espace, la distance riemannienne $d(A, B)$ entre ces deux points est égale à la plus petite longueur d'un chemin continu d'extrémité A et B . Un tel chemin minimisant les distances sur une surface donnée est appelée une **géodésique**. La géométrie de cette surface sera définie par cette distance, et l'on pourra parler de boules de centre A et de rayon r , et de tout ce qui fait le charme des espaces métriques...

Les géométries riemanniennes définies à l'aide de géodésiques sont très utiles : on pensera à nos déplacements en avion ou en bateau à la surface du globe, mais aussi à l'informatique embarquée dans les chars qui leur permettent de calculer immédiatement le plus court chemin leur permettant d'aller d'un point à un autre en minimisant la distance compte tenu du relief et des obstacles naturels (qui empêchent parfois le passage)..

5.2 La réalité

Dans une leçon de CAPES, que pouvons-nous supposer concernant la géométrie euclidienne ? Quelle axiomatique choisir ?

Pour moi, le plus simple est de me placer dans une axiomatique qui introduit les nombres (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , puis \mathbb{R}), les espaces vectoriels, puis les espaces affines. C'est ce que je choisis d'habitude, et c'est la méthode en général employée à l'université. Elle permet des justifications satisfaisantes.

A certains moments, et pour atteindre certains objectifs (ou tout simplement pour répondre à certaines questions du jury) il est intéressant d'utiliser une axiomatique que j'appellerai "de la droite et du point", autrement dit de travailler dans un espace où existent des objets appelés points, et des objets appelés droites (qui sont des ensembles de points), et de dire que ces objets vérifient certains axiomes.

Deux visions de la géométrie euclidienne :

- ✓ l'axiomatique espaces vectoriels - espaces affines,
- ✓ une axiomatique de la droite et du point.

Ce n'est bien entendu pas en 25 minutes d'exposé que l'on pourra présenter et utiliser une axiomatique pointue et ciselée, voire refaire les *Eléments* d'Euclide ! Tout au plus utiliserons-nous certains axiomes d'Euclide, dont ceux d'incidence. Si connaître parfaitement une axiomatique de la droite et du point me paraît hors sujet, il est bon de savoir qu'il en existe, et qu'elles nous offrent de belles constructions, nous permettant de mieux comprendre pourquoi le plan euclidien est tel qu'il est.

Présenter le Théorème de Thalès comme au paragraphe 4.7 revient de fait à utiliser une axiomatique de la droite et du point, mais l'exercice est rendu possible (et l'on pourra répondre le cas échéant aux questions embarrassantes) car :

- on prend le soin de dire que la présentation pourrait être utilisée au collège à l'aide d'un "cours interactif" et d'activités, et en admettant bien entendu la dernière phase permettant de passer des rationnels aux réels, du discontinu au continu.

- on sait qu'admettre les propriétés et les caractérisations d'un rectangle revient exactement à introduire un certain nombre d'axiomes, de manière très visuelle pour l'élève, et donc introduire une construction axiomatique à visée pédagogique.

- on connaît l'existence des axiomatiques de la droite et du point, on connaît les axiomes d'incidence d'Euclide (§ 5.3), et l'on est au fait de la difficulté liée à la dernière phase du raisonnement (qui ne sera pas abordé en collège !).

5.3 Les grandes lignes de l'axiomatique de Choquet

Dans son livre intitulé "L'enseignement de la géométrie", paru chez Hermann en 1964, Gustave Choquet nous propose une construction axiomatique que je reprends ici pour en tracer les grandes lignes. La numérotation des axiomes est celle employée dans ce livre. L'axiomatique présentée est à base "vectorielle" puisque n'introduit la métrique qu'une fois la structure vectorielle du plan bien établie et étudiée. En appendice du même ouvrage, Choquet propose une axiomatique à base "métrique" où les axiomes sont soit différents, soit regroupés différemment et présentés dans un autre ordre (dans cette seconde option, l'inégalité triangulaire devient un axiome à part entière, comme on la présente en collège parfois).

Axiome 0 : Le plan contient au moins deux droites, et toute droite contient au moins deux points.

On dit que deux droites D et D' sont parallèles si elles sont égales ou ne s'intersectent pas (et l'on note $D//D'$).

AXIOMES D'INCIDENCE :

Axiome I_a : Par deux points distincts on peut faire passer une droite et une seulement.

Axiome I_b : Par un point donné il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée.

On définit les projections obliques et l'on démontre que la projection sur une droite D parallèlement à une droite Δ définit une bijection entre une droite D' (non parallèle à Δ) et D . On en déduit que toutes les droites ont le même cardinal...

AXIOMES D'ORDRE :

Axiome II_a : À toute droite sont associées deux structures d'ordre total, opposées l'une de l'autre.

L'ordre sur une droite permet de définir les segments et les demi-droites.

Axiome II_b : (*Axiome de passage qui relie les structures d'ordre des diverses droites*) Si A, B, C, D sont quatre points distincts tels que les droites (BC) et (AD) soient parallèles, et si $M \in [AB]$, alors toute parallèle à (BC) passant par M coupe aussi le segment $[CD]$.

L'axiome de passage est bien celui qui nous a permis de passer du discontinu au continu dans la dernière phase du raisonnement du § 4.7.

AXIOMES DE STRUCTURE AFFINE :

Axiome III_a : Au plan \mathcal{P} est associée une application $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}_+$ appelée distance, telle que

- $\forall A, B \in \mathcal{P} \quad d(A, B) = d(B, A)$,
- Pour toute droite D , pour tout point A de D , et pour tout nombre réel positif l , il existe un unique point M de D tel que $A \leq M$ et $d(A, M) = l$,
- $M \in [AB] \Leftrightarrow d(A, M) + d(M, B) = d(A, B)$.

Axiome III_b : (*Relation entre les structures affines des différentes droites*) Si A, B, C, D sont quatre points distincts tels que les droites (BC) et (AD) soient parallèles, la parallèle à (BC) qui passe par le milieu de $[AB]$ passe aussi par le milieu de $[CD]$.

Ce dernier axiome est bien un résultat affine puisque ne fait intervenir que des milieux de segments. Il est amusant de voir que nous obtenons une structure affine (et vectorielle) en introduisant ces deux derniers axiomes qui ont l'apparence d'axiomes métriques.

AXIOMES DE STRUCTURE METRIQUE :

Axiome IV_a : (*Axiome des perpendiculaires*) La relation de perpendicularité (notée \perp) est une relation binaire sur l'ensemble des droites, telle que

- $D \perp D' \Leftrightarrow D' \perp D$ (symétrie),
- $D \perp D' \Rightarrow D$ et D' non parallèles,
- Pour toute droite D il existe au moins une droite D' perpendiculaire à D ,
- Si $D \perp D'$, on a

$$\Delta \perp D' \Leftrightarrow \Delta // D.$$

On définit le rapport de projection orthogonale $c(d, d')$ de deux demi-droites de même origine O comme un rapport $\frac{Op(A)}{OA}$ de mesures algébriques, où $A \in d$ vérifie $\overline{OA} = 1$, et où p désigne la projection orthogonale sur la droite contenant d' . On pose enfin :

Axiome IV_b : (*Axiome de symétrie*) Pour tout couple (d, d') de deux demi-droites de même origine, $c(d, d') = c(d', d)$.

A partir de là, on définit le produit scalaire et l'on peut démontrer toutes les propriétés métriques élémentaires, définir et étudier les symétries, les isométries du plan, les similitudes et les angles...